Histoire de logarithmes

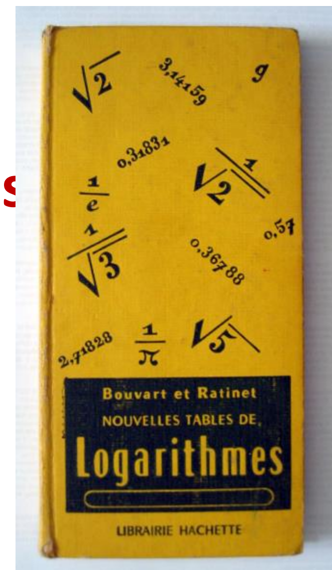
Marie-Renée FLEURY

Histoire et épistémologie des Mathématiques

Stage "PAF", 2 février 2024

Les logarithmes, en réduisant les calculs de quelques mois à quelques jours, doublent quasiment la vie des astronomes.

Laplace (1749 ; 1827).



Faculté des Sciences Aix-Marseille Université

IRES

Introduction

- **Difficulté de la création d'un concept** pressenti depuis des siècles.
  De la notion de logarithme naîtra la notion de fonction et de courbe d'une fonction.

- Les travaux de **John Neper et de Henry Briggs** : la clé de voute.

- La **quadrature** de l'hyperbole par **Grégoire Saint-Vincent** .

- **Algorithmes**

  de **Henry Briggs** : calcul par quatraine de log(2).

  de **W. Brouncker** pour calculer log 2 par dichotomie

a) Chez les Babyloniens au IIe millénaire av. J.-C au VIe siècle av. J.-C.

Tablettes **de tables d'exposants** a^n où n est un entier entre 2 et 10 et a est 9 , (1;4) ou (3; 45) (ces 3 nombres étant des carrés).

MLC-2078

Ces tablettes permettent de répondre à :
« à quelle puissance un nombre *a* doit-il être élevé pour obtenir un nombre donné ».

Ces tablettes avaient leur **utilité dans des calculs d'intérêts**

Exemple : connaitre le temps nécessaire pour doubler un capital C_0 à un taux d'intérêt de 20%.

« à quelle puissance un nombre *a* doit-il être élevé pour obtenir un nombre donné ».

Cela revient à trouver le logarithme d'un nombre donné.

Sur la colonne de gauche on peut lire :

$16^{(0;15)} = 2$ soit $(0;15) = \log_{16} 2$

$16^{(0;30)} = 4$ $(0;30) = \log_{16} 4$

$16^{(0;45)} = 8$ $(0;45) = \log_{16} 8$

$16^{(1)} = 16$ $1 = \log_{16} 16$

MLC-2078

Les Babyloniens antiques étaient très proches d'une découverte importante, mais ont échoué à l'étape finale essentielle.

Otto Neugebauer (1899-1990), historien des sciences

b) Un problème d'Archimède (Syracuse, 287-212 av. J.-C.)

Dans l'*Arénaire,* Archimède mathématicien, géomètre, physicien, propose un système de numération pour traiter sans difficulté les grands nombres

« *Lorsque des nombres sont en proportion continue à partir de l'unité, et que certains de ces nombres sont multipliés entre eux, le produit sera dans la même progression, éloigné du plus grand des nombres multipliés d'autant de nombres que le plus petit des nombres multipliés l'est de l'unité dans la progression, et éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les nombres multipliés sont éloignés de l'unité*. »

Pour cela, il met en évidence la relation exponentielle fondamentale :
Pour tous entiers naturels n et m, et un nombre réel a

$$a^{n+m} = a^n \times a^m$$

c) Nicolas Chuquet (env 1450 ; 1488)

Dans *Triparty en la science des nombres (1484),* il introduit des exposants fractionnaires et négatifs et retrouve la propriété d'Archimède.

Problème : *Un tonneau qui se vide de 1/10 de sa capacité chaque jour. Au bout de combien de jour sera-t-il à moitié vide ?*

Chuquet estime que l'interpolation linéaire entre le 6e et le 7e jour admise par les mathématiciens de l'époque est manifestement fausse mais il ne propose pas de solution.

Il pressent l'existence des logarithmes

d) Luca Paccioli (1447-1517)

Dans *Summa de arithmetica, geometria, de proportioni et de proportionalita* (1494), il résume les mathématiques de son époque, notamment en algèbre et il présente la méthode vénitienne des tenues des comptes, notamment la règle des 72.

A voler sapere ogni quantitµa a tanto per 100 l'anno, in quanti anni sara tornata doppia tra utile e capitale, tieni per regola 72, a mente, il quale sempre partirai per l'interesse, e quello che ne viene, in tanti anni sara raddoppiato. Esem pio: Quando l'interesse e a 6 per 100 l'anno, dico che si parta 72 per 6 ; ne vien 12, e in 12 anni sara raddoppiato il capitale .

d) Règle des 72 de Luca Paccioli (1447-1517)

Pour un capital placé à $r\%$ par période, il faut $72/r$ périodes pour le doubler

$$(1+r)^n=2 \text{ d'où } n=\frac{\ln 2}{\ln(1+r)})\approx\frac{\ln 2}{r} \text{ pour } r \text{ petit}$$

Or **ln 2 ≅ 69** **/** **72 a 10 diviseurs** (2,3,4,6,8,9,12)

e) Michael Stifel (1486-1567)

Dans *Arithmetica Integra* il poursuit les idées de Chuquet sur les exposants et propose en regard une progression arithmétique et géométrique :

…	**-5**	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**…**
…	1/32	1/16	1/8	¼	½	1	2	4	…

Il fait correspondre $3+5$ en exposant à 8×32
mais aussi $-3+(-5)$ en exposant à $\frac{1}{8}\times\frac{1}{32}$

On pense que Neper avait connaissance de ses travaux et qu'il s'en serait inspiré.

1- Histoire de la fonction logarithme avant J. Neper

f) Jost Bürgi (1552-1632)

Suisse, horloger, mathématicien, astronome. Il collabore avec J. Kepler. Il publie sa table en 1620.

J. Bürgi calcule **23028 nombres** correspondant aux termes d'une progression géométrique de premier terme **$K = 10^8$** et de raison **$a = (1 + 1/10^4) = 1,0001$**

Ces nombres ≪ **schwarzen Zhalen** ≫ ou nombres noirs couvrent la plage **$[10^8 ; 10^9]$,** sont mis en regard des termes d'une progression arithmétique de raison **$\lambda = 10$** et de premier terme 0, les ≪ **rothen Zhalen** ≫ ou nombres rouges

$$Si \ \ v_n = Ka^n, \text{ on obtient : } v_p \, v_q = K \, v_{p+q} \, .$$

Le produit de deux nombres quelconques s'obtient à virgule flottante.

f) Prostaphérèse (fin XVIe ; début XVIIe)

Algorithme à base de formules trigonométriques utilisé pour les multiplications ou les divisions de nombres ayant beaucoup de chiffres.

Très utilisé par les astronomes* avant l'apparition des tables de logarithmes.

**Ibn-Yunus (vers 950 – 1009), Johannes Werner (1468-1522), Jacob Christmann (1564 – 1613), reprise par Tycho Brahé, (1546 – 1601).*

Formules de linéarisation dites de Simpson (connues de Jost Bürgi (1552 -1632))

sin a sin b = $\frac{1}{2}$ [cos (a-b) – cos (a+b)] ; cos a cos b = $\frac{1}{2}$ [cos (a-b) + cos (a+b)] ; …

f) Prostaphérèse (fin XVIe ; début XVIIe)

Exemple : 5227 x 12,1877

Lus sur la table trigo : 0,5227 = cos (58,5°) et 0,121877 = cos(83°)

cos (58,5°) x cos(83°) = $\frac{1}{2}$[(cos(24,5°) + cos(141,5°))]
= 0,0637

Il reste à replacer la virgule flottante : 5227 x 12,1877 = 63700

Le résultat exact est 63705,1079

2-Contexte et raison d'une mirifique invention

2-1- Développement d'activités consommatrices de calculs longs et compliqués :

- astronomie (Tycho Brahé, Képler), commerce (tables d'intérêt)
- navigation (repérage par les étoiles)

2-2- Écriture des nombres

- Connaissance et pratique aisée du **calcul indien** et de **la numération décimale** apportées par les arabes.
- Elargissement du concept de nombre **aux rationnels et irrationnels** : *El Farabi puis El Uqlidisi puis le perse Al Kashi, puis Stevin*.
- les décimaux rendent possible d'envisager le continu des grandeurs

3-Contexte et raison d'une mirifique invention

2-1 Une autre manière d'appréhender le continu

- **nouvelle conception du mouvement** : variable temps, ce qui amènera à la notion de fonction

- **penser la vitesse d'un mobile comme une grandeur** mathématique (Galilée (1564-1642))

-Inverser le sens de lecture de $X = (1+\frac{1}{10^k})^n$ avec **variation continue de l'exposant**

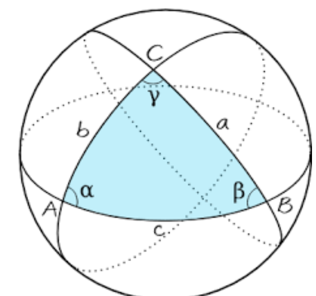
Pour Neper, pas de puissances, pas d'exposants, uniquement deux progressions en correspondance.

3-1- John Neper (Napier), (1580 – 1617)
Bibiographie

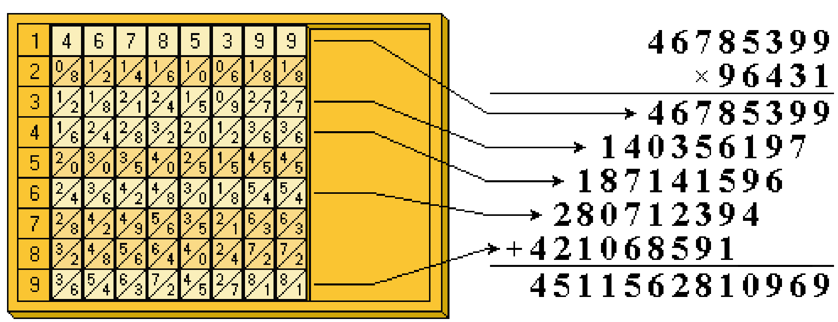
John Napier ou Neper théologien, mathématicien, physicien, astronome (1580 – 1617), né et mort au château de Merchiston (près d’Edimburg)

- Il popularise **l’usage du point pour la notation** anglo-saxonne des nombres décimaux

- Il établit quelques formules de **trigonométrie sphérique**



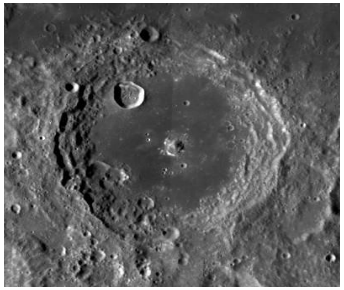
- Il construit ses **« bâtons de Neper »,** "réglettes", permettant d'effectuer les quatre opérations élémentaires, premières machines à calculer



3-1- J. Neper (1580 – 1617)

- En acoustique, le néper est **une unité de mesure.**

- **Un cratère lunaire**, le cratère Neper, lui rend hommage.

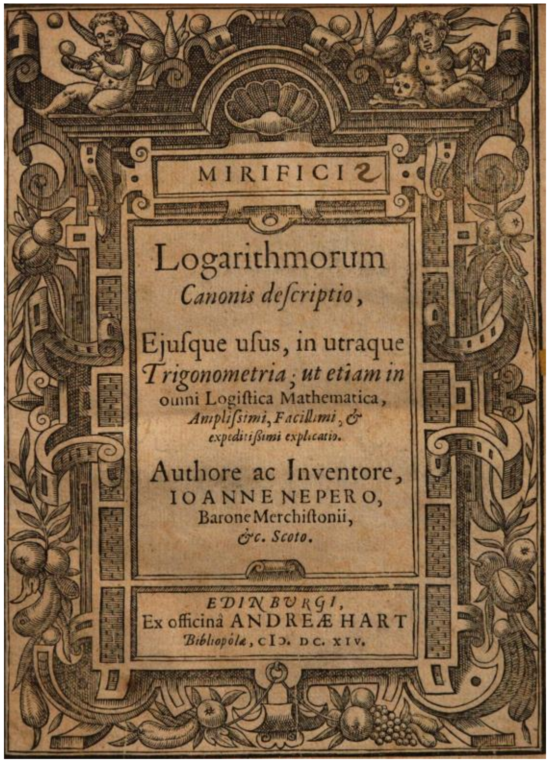


- mais surtout il ''invente'' les **logarithmes.**

Le mot ≪ logarithme ≫ a été créé par Neper lui-même, à partir de deux racines grecques, **λογος (logos,** raison/rapport) et **αριθμος (arithmos,** science du nombre entier)

3-2 Mirifici logarithmorum canonis descriptio

1614 publication de "*Mirifici logarithmorum canonis descriptio* "


MIRIFICI

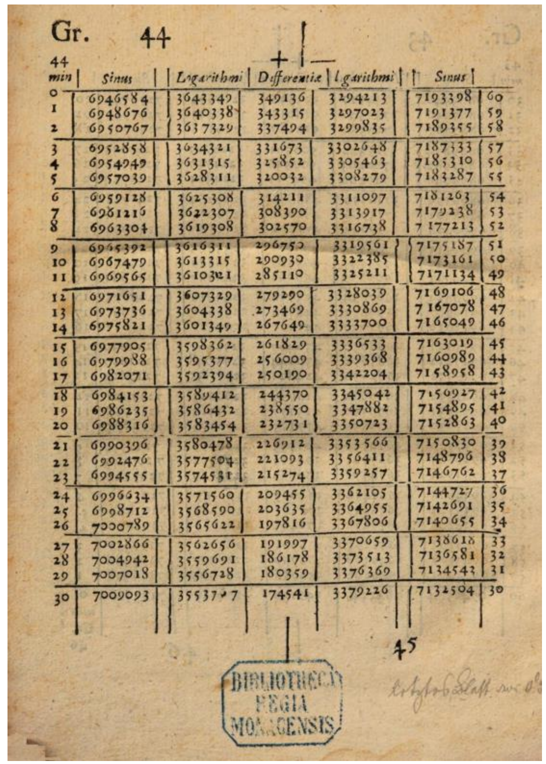
Logarithmorum

Canonis descriptio,

Ejusque usus, in utraque *Trigonometria; ut etiam in* omni Logistica Mathematica, *Amplissimi, Facillimi, & expeditissimi explicatio.*

Authore ac Inventore, IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, *&c. Scoto.*

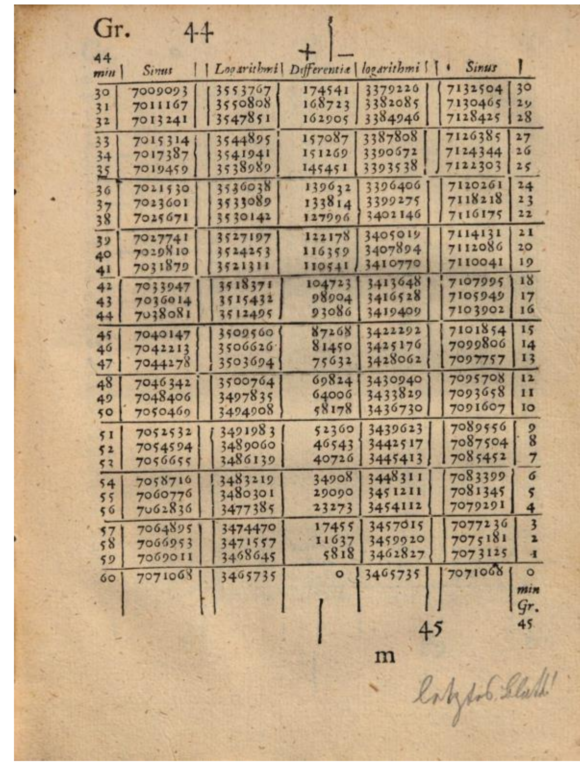
EDINBURGI, Ex officina ANDREÆ HART *Bibliopolæ*, CIↃ. DC. XIV.


Gr. 44

44

min	Sinus	Logarithmi	+ Differentiæ —	Logarithmi	Sinus	
0	6946584	3643349	349136	3294213	7193398	60
1	6948676	3640338	343315	3297023	7191377	59
2	6950767	3637329	337494	3299835	7189355	58
3	6952858	3634321	331673	3302648	7187333	57
4	6954949	3631315	325852	3305463	7185310	56
5	6957039	3628311	320032	3308279	7183287	55
6	6959128	3625308	314211	3311097	7181263	54
7	6961216	3622307	308390	3313917	7179238	53
8	6963304	3619308	302570	3316738	7177213	52
9	6965392	3616311	296750	3319561	7175187	51
10	6967479	3613315	290930	3322385	7173161	50
11	6969565	3610321	285110	3325211	7171134	49
12	6971651	3607329	279290	3328039	7169106	48
13	6973736	3604338	273469	3330869	7167078	47
14	6975821	3601349	267649	3333700	7165049	46
15	6977905	3598362	261829	3336533	7163019	45
16	6979988	3595377	256009	3339368	7160989	44
17	6982071	3592394	250190	3342204	7158958	43
18	6984153	3589412	244370	3345042	7150927	42
19	6986235	3586432	238550	3347882	7154895	41
20	6988316	3583454	232731	3350723	7152863	40
21	6990396	3580478	226912	3353566	7150830	39
22	6992476	3577504	221093	3356411	7148796	38
23	6994555	3574531	215274	3359257	7146762	37
24	6996634	3571560	209455	3362105	7144727	36
25	6998712	3568590	203635	3364955	7142691	35
26	7000789	3565622	197816	3367806	7140655	34
27	7002866	3562656	191997	3370659	7138618	33
28	7004942	3559691	186178	3373513	7136581	32
29	7007018	3556728	180359	3376369	7134543	31
30	7009093	35537[illegible]7	174541	3379226	7132504	30

45


Gr. 44

44

min	Sinus	Logarithmi	+ Differentiæ —	logarithmi	Sinus	
30	7009093	3553767	174541	3379226	7132504	30
31	7011167	3550808	168723	3382085	7130465	29
32	7013241	3547851	162905	3384946	7128425	28
33	7015314	3544895	157087	3387808	7126385	27
34	7017387	3541941	151269	3390672	7124344	26
35	7019459	3538989	145451	3393538	7122303	25
36	7021530	3536038	139632	3396406	7120261	24
37	7023601	3533089	133814	3399275	7118218	23
38	7025671	3530142	127996	3402146	7116175	22
39	7027741	3527197	122178	3405019	7114131	21
40	7029810	3524253	116359	3407894	7112086	20
41	7031879	3521311	110541	3410770	7110041	19
42	7033947	3518371	104723	3413648	7107995	18
43	7036014	3515432	98904	3416528	7105949	17
44	7038081	3512495	93086	3419409	7103902	16
45	7040147	3509560	87268	3422292	7101854	15
46	7042213	3506626	81450	3425176	7099806	14
47	7044278	3503694	75632	3428062	7097757	13
48	7046342	3500764	69824	3430940	7095708	12
49	7048406	3497835	64006	3433829	7093658	11
50	7050469	3494908	58178	3436730	7091607	10
51	7052532	3491983	52360	3439623	7089556	9
52	7054594	3489060	46543	3442517	7087504	8
53	7056655	3486139	40726	3445413	7085452	7
54	7058716	3483219	34908	3448311	7083399	6
55	7060776	3480301	29090	3451211	7081345	5
56	7062836	3477385	23273	3454112	7079291	4
57	7064895	3474470	17455	3457015	7077236	3
58	7066953	3471557	11637	3459920	7075181	2
59	7069011	3468645	5818	3462827	7073125	1
60	7071068	3465735	0	3465735	7071068	0
						min Gr. 45

45

m

L'ambition de Neper est de faciliter le travail des astronomes et des navigateurs et de tous ceux qui ont a faire de fastidieux calculs notamment, pour les premiers, la résolution de triangles sphériques.

3-2 Mirifici logarithmorum canonis descriptio

Traduction de la préface

« Très illustre amateur de mathématiques, comme rien n'est aussi pénible que la pratique des mathématiques, parce que la logistique est d'autant plus freinée, retardée que les multiplications, les divisions et les extractions des racines carrées ou cubiques portent sur de grands nombres ; qu'elle est soumise à l'ennui des longues opérations et beaucoup plus encore à l'incertitude des erreurs, j'ai entrepris de rechercher par quel procédé sûr et rapide on pourrait éloigner ces obstacles. Dans ce but, j'en ai examiné soigneusement une grande quantité, les uns après les autres, et enfin j'en ai trouvé plus d'un, clair et d'un emploi facile, dont je traiterai probablement ailleurs. À la vérité, aucun, parmi les autres, n'est plus utile que l'un d'eux ; par son moyen, on rejette les nombres utilisés dans les multiplications, les divisions et les extractions de racines lorsqu'elles sont difficiles et prolixes, et on les remplace par d'autres nombres, que j'ai pris soin de leur adjoindre, et l'on achève le calcul par des additions, des soustractions, des divisions par deux et par trois seulement. Est-il un mystère, qui, au milieu de tant d'autres, lui soit supérieur ? Il m'a plu de communiquer son usage au monde des mathématiciens. »

3-2 Mirifici logarithmorum canonis descriptio

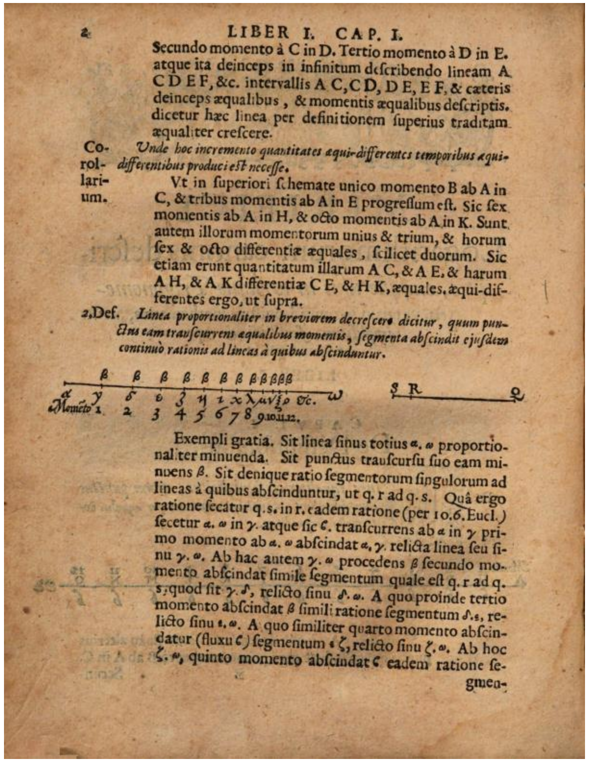
MIRIFICI
Logarithmorum canonis descri-
ptio, eiusque usus in utrâque Trigonome-
tria, ut etiam in omni Logistica mathematica,
amplissimi, facillimi, & expe-
ditissimi explicatio.

LIBER I.

CAPUT I.
De Definitionibus.

1.Def. *Linea æqualiter crescere dicitur, quum punctus eam describens, æqualibus momentis per æqualia intervalla progreditur.*

Sit punctus A, à quo ducenda sit linea fluxu alterius puncti, qui sit B. fluat ergo primo momento B ab A in C. Secun-



LIBER I. CAP. I.

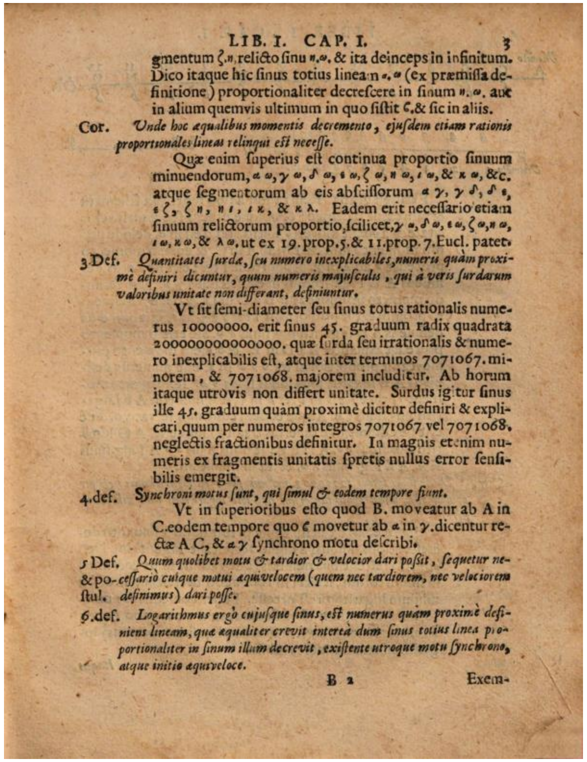
Secundo momento à C in D. Tertio momento à D in E. atque ita deinceps in infinitum describendo lineam A C D E F, &c. intervallis A C, C D, D E, E F, & cæteris deinceps æqualibus, & momentis æqualibus descriptis. dicetur hæc linea per definitionem superius traditam æqualiter crescere.

Corollarium. *Unde hoc incremento quantitates æqui-differentes temporibus æqui-differentibus produci est necesse.*

Vt in superiori schemate unico momento B ab A in C, & tribus momentis ab A in E progressum est. Sic sex momentis ab A in H, & octo momentis ab A in K. Sunt autem illorum momentorum unius & trium, & horum sex & octo differentiæ æquales, scilicet duorum. Sic etiam erunt quantitatum illarum A C, & A E, & harum A H, & A K differentiæ C E, & H K, æquales, æqui-differentes ergo, ut supra.

2.Def. *Linea proportionaliter in breviorem decrescere dicitur, quum punctus eam transcurrens æqualibus momentis, segmenta abscindit ejusdem continuò rationis ad lineas à quibus abscinduntur.*

Exempli gratia. Sit linea sinus totius α. ω proportionaliter minuenda. Sit punctus transcursu suo eam minuens β. Sit denique ratio segmentorum singulorum ad lineas à quibus abscinduntur, ut q. r ad q. s. Quâ ergo ratione secatur q. s. in r. eadem ratione (per 10.6. Eucl.) secetur α. ω in γ. atque sic ς. transcurrens ab α in γ primo momento ab α. ω abscindat α. γ. relicta linea seu sinu γ. ω. Ab hac autem γ. ω procedens β secundo momento abscindat simile segmentum quale est q. r ad q. s, quod sit γ. δ, relicto sinu δ. ω. A quo proinde tertio momento abscindat β simili ratione segmentum δ. ε, relicto sinu ε. ω. A quo similiter quarto momento abscindatur (fluxu ς) segmentum ε ζ, relicto sinu ζ. ω. Ab hoc ζ. ω, quinto momento abscindat ς eadem ratione segmen-



LIB. I. CAP. I. 3

gmentum ζ. η, relicto sinu η. ω. & ita deinceps in infinitum. Dico itaque hic sinus totius lineam α. ω (ex præmissa definitione) proportionaliter decrescere in sinum η. ω. aut in alium quemvis ultimum in quo sistit ς. & sic in aliis.

Cor. *Unde hoc æqualibus momentis decremento, ejusdem etiam rationis proportionales lineas relinqui est necesse.*

Quæ enim superius est continua proportio sinuum minuendorum, α ω, γ ω, δ ω, ε ω, ζ ω, η ω, ι ω, & κ ω, &c. atque segmentorum ab eis abscissorum α γ, γ δ, δ ε, ε ζ, ζ η, η ι, ι κ, & κ λ. Eadem erit necessario etiam sinuum relictorum proportio, scilicet, γ ω, δ ω, ε ω, ζ ω, η ω, ι ω, κ ω, & λ ω, ut ex 19. prop. 5. & 11. prop. 7. Eucl. patet.

3.Def. *Quantitates surdæ, seu numero inexplicabiles, numeris quàm proximè definiri dicuntur, quum numeris majusculis, qui à veris surdarum valoribus unitate non differant, definiuntur.*

Vt sit semi-diameter seu sinus totus rationalis numerus 10000000. erit sinus 45. graduum radix quadrata 200000000000000. quæ surda seu irrationalis & numero inexplicabilis est, atque inter terminos 7071067. minorem, & 7071068. majorem includitur. Ab horum itaque utrovis non differt unitate. Surdus igitur sinus ille 45. graduum quàm proximè dicitur definiri & explicari, quum per numeros integros 7071067 vel 7071068. neglectis fractionibus definitur. In magnis etenim numeris ex fragmentis unitatis spretis nullus error sensibilis emergit.

4.def. *Synchroni motus sunt, qui simul & eodem tempore fiunt.*

Vt in superioribus esto quod B. moveatur ab A in C. eodem tempore quo ς movetur ab α in γ. dicentur recta A C, & α γ synchrono motu describi.

5.Def. & postul. *Quum quolibet motu & tardior & velocior dari possit, sequetur necessariò cuique motui æquivelocem (quem nec tardiorem, nec velociorem definimus) dari posse.*

6.def. *Logarithmus ergò cujusque sinus, est numerus quàm proximè definiens lineam, quæ æqualiter crevit interea dum sinus totius linea proportionaliter in sinum illum decrevit, existente utroque motu synchrono, atque initio æquiveloce.*

B 2 Exem-

57 pages de texte, reparties en deux livres ayant respectivement cinq et six chapitres et à la fin, 90 pages de tables.
Neper élabore une table de logarithmes des sinus des arcs de 0° à 90°, de minute en minute.

Sommaire du livre I :

LIBER I.

CAPVT. I.
De Definitionibus.

Chap. 1. Définitions
[entre autres *des nombres logarithmes*].

CAP. II.
De Logarithm. propoſitionibus.

Chap. 2. Propositions sur les logarithmes.

CAP. III.
Deſcriptionem complectens tabulæ logarithmorum, & ſeptem ejus columnarum.

Chap. 3. Description complète de la table des logarithmes et des sept colonnes de celle-ci.

10 LIBER I. CAP. IV.

CAP. IV.
De uſu tabulæ, & numerorum eius.

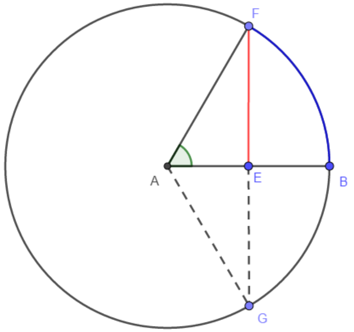
Chap. 4. L'usage de la table et de ses nombres.

CAP. V.
De ampliſsimo Logarithmorum uſu, & expedita per eos praxi.

Chap. 5. L'usage plus approfondi des logarithmes et de leur pratique.

A la fin du livre, les tables donnant les nombres logarithmes, associés aux sinus des arcs de 0° à 90° de minutes en minutes (soit 90 pages).

À l'époque **le Sinus est une grandeur**, c'est la longueur de la demi-corde de l'arc double, dans un cercle de grand rayon (10^7 pour Neper)



Notons ***Sin(x)*** le sinus de Neper pour un arc x (mesuré en degré) et sin(x) notre sinus actuel, on a la relation :

$$\boldsymbol{Sin(x) = 10^7 sin(x)}$$

Notons $\boldsymbol{Nlog}$ la « fonction » tabulée par Neper, on a :

$$\boldsymbol{Nlog(Sin(x)) = -10^7 ln(sin(x))}$$

C'est-à-dire :

$$\boldsymbol{Nlog(X) = -10^7\, ln\left(\frac{X}{10^7}\right) = 10^7\left[ln\left(10^7\right) - ln(X)\right]}$$

3-4 La table de logarithmes de J. Neper

GR : Gradius (Degré en latin)

Nlog(Sin 0°) = infinitum

Nlog(10^7) = 0

Remarque : La propriété algébrique de transformation des produits en sommes n'est pas vérifiée

Gr. 0

0

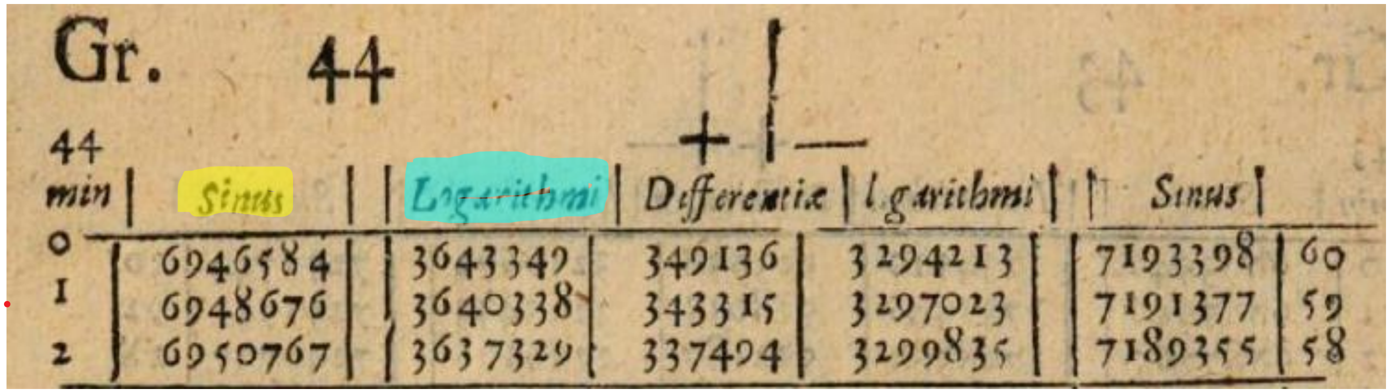
\+ | −

min	Sinus.	Logarithmi	Differentia	logarithmi	Sinus	
0	0	infinitum	Infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562745	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55
6	17453	63508099	63508083	16	9999986	54
7	20362	61966595	61966573	22	9999980	53
8	23271	60631284	60631256	28	9999974	52
9	26180	59453453	59453418	35	9999967	51
10	29088	58399857	58399814	43	9999959	50
11	31997	57446759	57446707	52	9999950	49
12	34906	56576646	56576584	62	9999940	48
13	37815	55776222	55776149	73	9999928	47
14	40724	55035148	55035064	84	9999917	46
15	43632	54345225	54345129	96	9999905	45
16	46541	53699843	53699734	109	9999892	44
17	49450	53093600	53093577	123	9999878	43
18	52359	52522019	52521881	138	9999863	42
19	55268	51981356	51981202	154	9999847	41
20	58177	51468431	51468361	170	9999831	40
21	61086	50980537	50980450	187	9999813	39
22	63995	50515342	50515137	205	9999795	38
23	66904	50070827	50070603	224	9999776	37
24	69813	49645239	49644995	244	9999756	36
25	72721	49237030	49236765	265	9999736	35
26	75630	48844826	48844539	287	9999714	34
27	78539	48467431	48467122	309	9999692	33
28	81448	48103763	48103431	332	9999668	32
29	84357	47752859	47752503	356	9999644	31
30	87265	47413852	47413471	381	9999619	30

89

3-4 La table de logarithmes de J. Neper

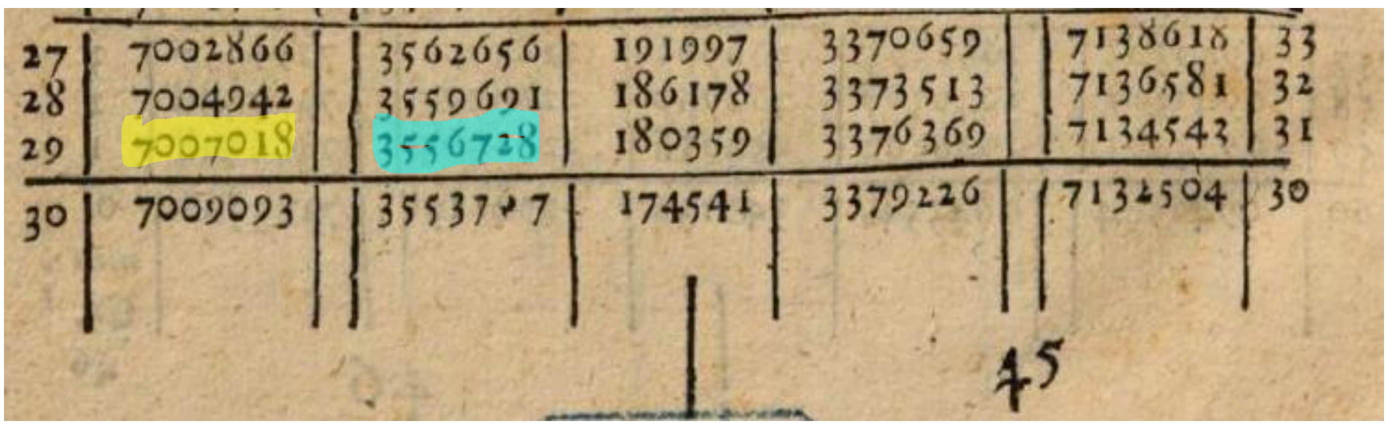
Extrait de la table correspondant à 44° figurant à la fin de "Mirifici logarithmorum canonis descriptio"



Gr. 44

\+ | —

44 min	Sinus	Logarithmi	Differentiæ	logarithmi	Sinus	
0	6946584	3643349	349136	3294213	7193398	60
1	6948676	3640338	343315	3297023	7191377	59
2	6950767	3637329	337494	3299835	7189355	58



27	7002866	3562656	191997	3370659	7138618	33
28	7004942	3559691	186178	3373513	7136581	32
29	7007018	3556728	180359	3376369	7134543	31
30	7009093	35537[illegible]7	174541	3379226	7132504	30

45

Avec une calculatrice :

$$\sin\left(44+\frac{29}{60}\right)=0.7007017585 \qquad et \qquad \ln\left(\sin\left(44+\frac{29}{60}\right)\right)=-0.355672934$$

Chapitre II, propriétés

Proposition 1 : *Les logarithmes de nombres ou de quantités proportionnels diffèrent d'une valeur égale :*

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *alors* *Nlog(a) - Nlog(b) = Nlog(c) - Nlog(d)*

Proposition 5 : *Des logarithmes de quatre proportionnels, l'agrégat des moyens est égal à l'agrégat des extrêmes :*

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *(ad = bc)* *alors* *Nlog(a) + Nlog(d) = Nlog(b) + Nlog(c)*

Proposition 3 : *Des logarithmes de trois proportionnels, le double du second est égal à l'agrégat des extrêmes :*

Si $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$ *(ad =* b^2*)* *alors* *2Nlog(b) = Nlog(a) + Nlog(d)*

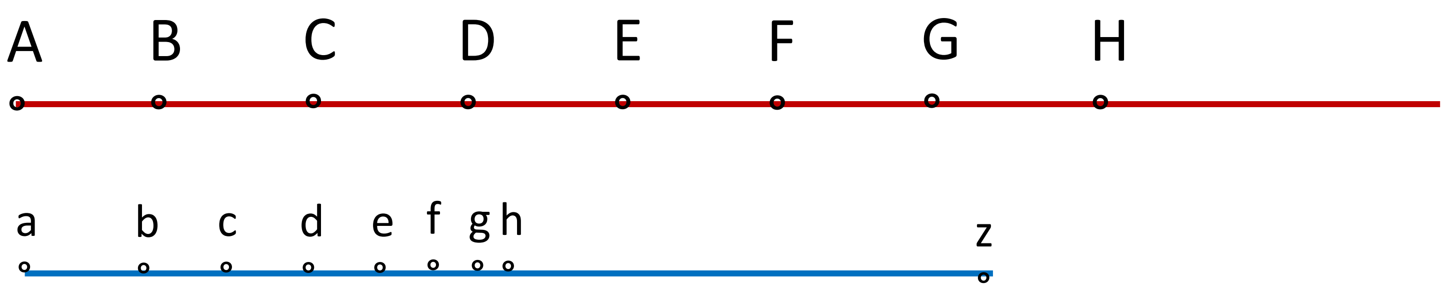
Soit si b= $\sqrt{ad}$ *alors* *Nlog(b) =* $\frac{Nlog(a)+Nlog(d)}{2}$

4-1 Les deux mouvements introduits par Neper (1614)

Le génie de Neper : Pour passer du discret au continu, Neper utilise deux mouvements ayant au départ la même vitesse :

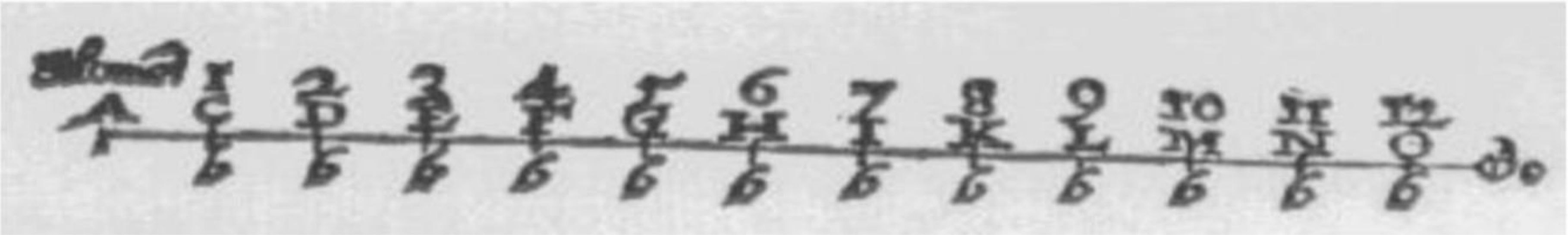
- l'un uniforme : en des temps égaux, les distances parcourues sont égales : AB = BC = CD = …
- l'autre décéléré : les distances restant à parcourir sont astreintes à respecter la condition de proportionnalité :

$$\text{et} \quad \frac{bz}{az} = \frac{cz}{bz} = \frac{dz}{cz} = \ldots$$

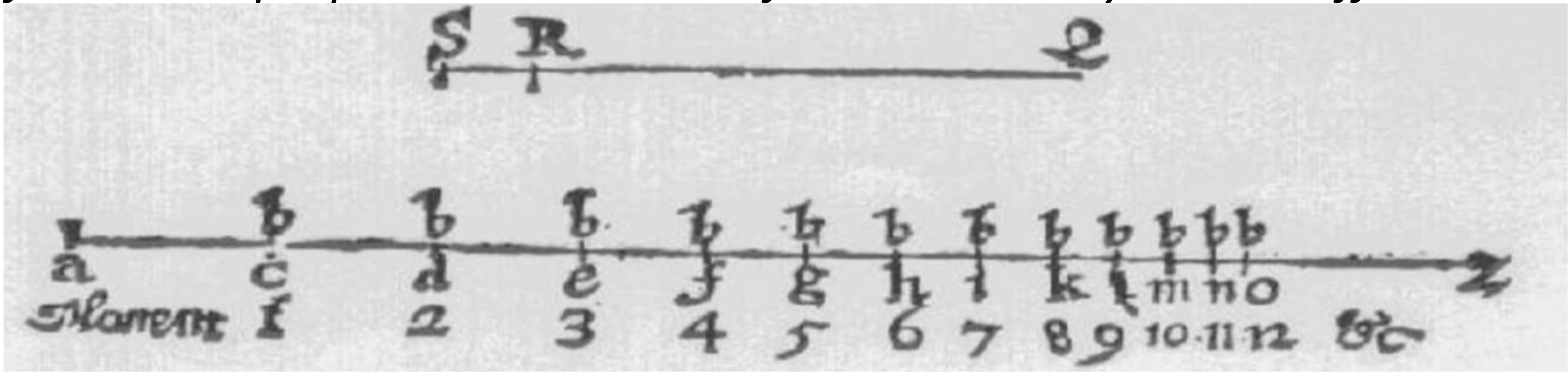


4-1 Les deux mouvements introduits par Neper (1614)

Def 1 : ***A line is said to increase equally****, when the poynt describing the same, goeth forward equall space, in equall times, or moments*



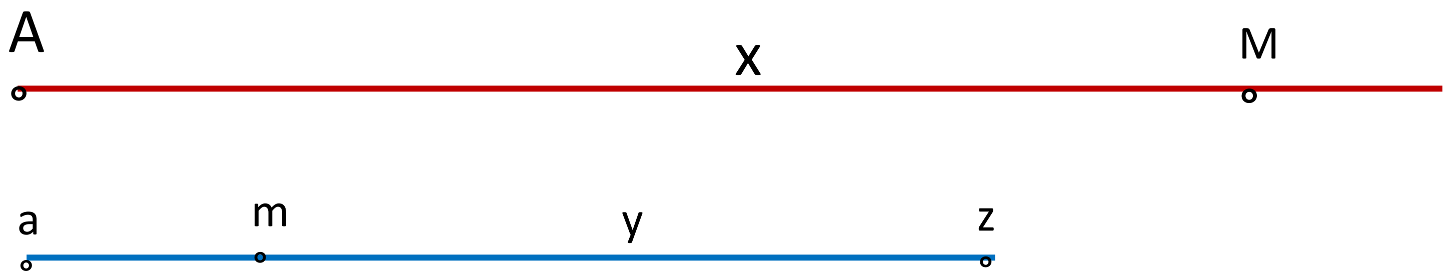
Def 2 : ***A line is said descrease proportionally into a shorter****, when the poynt describing the same in equall times, cutteth off parts continually of the same proportion to the lines from which they are cut off.*



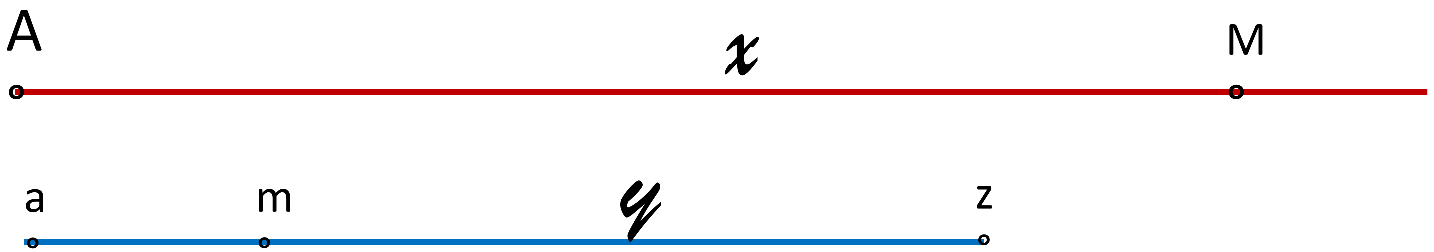
4-1 Les deux mouvements introduits par Neper (1614)

Def 6 : ***The* Logarithme** *therefore of any sine is a number very neerely expressing the line which increased equally in the meane time, whiles the line of the whole sine decreased proportionally into that sine, both motions being equal-timed, and the beginning equally-swift.*

Le logarithme d'un sinus donné est un nombre exprimant très fidèlement la ligne qui croit arithmétiquement pendant que la ligne du sinus total décroit géométriquement jusqu'au sinus donné, les deux mouvements commençant au même instant et avec la même vitesse.



4-2 Une interprétation moderne des premières définitions



Soit x et y sont deux fonctions dérivables où x = AM et y = mz, on peut traduire les contraintes par :

$$(1) \qquad \forall\, h \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \exists\, K \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_+, \qquad x(t+h) - x(t) = K$$

$$(2) \qquad \forall\, h \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \exists\, k \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{y(t+h)}{y(t)} = k$$

De la première condition on tire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad x\left(t + \frac{h}{n}\right) - x(t) = \frac{K}{n}$$

qui, après multiplication par $\frac{n}{h}$, permet d'écrire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{x\left(t + \frac{h}{n}\right) - x(t)}{\frac{h}{n}} = \frac{K}{h}$$

puis, en faisant tendre n vers l'infini on obtient : $\boldsymbol{\dot{x}(t) = \frac{K}{h}}$.

4-4 La mise en équation du problème posé par Neper

La deuxième condition permet d'écrire, pour $n \in \mathbb{N}^*$: .

$$k = \frac{y(t+h)}{y(t)} = \frac{y\left(t+\frac{h}{n}\right)}{y(t)} \times \frac{y\left(t+2\frac{h}{n}\right)}{y\left(t+\frac{h}{n}\right)} \times \cdots \times \frac{y(t+h)}{y\left(t+(n-1)\frac{h}{n}\right)} = \left(\frac{y\left(t+\frac{h}{n}\right)}{y(t)}\right)^n$$

donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{y\left(t+\frac{h}{n}\right)}{y(t)} = k^{\frac{1}{n}}$$

ce qui donne :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{y\left(t+\frac{h}{n}\right) - y(t)}{\frac{h\, y(t)}{n}} = \frac{n}{h}\, \frac{y\left(t+\frac{h}{n}\right) - y(t)}{y(t)} = \frac{n}{h}\left(k^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

puis, en faisant tendre n vers l'infini et en utilisant un développement limité de $k^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(k)}$ on obtient :

$$\boldsymbol{\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{1}{h} \lim_{n\to\infty} n\left(k^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \frac{ln(k)}{h} = -C}$$

où la constante C est positive, car la valeur de k est inférieure à 1.

4-5 Le problème différentiel résolu par Neper

Ceci montre que la fonction y est solution de l'équation différentielle :

$\boldsymbol{\dot{y} + C\,y = 0},$ dont les solutions sont : $\boldsymbol{y = A\,exp(-\,Ct)}$.

La condition initiale $y(0) = az$ donne $\boldsymbol{A = az}$.

Le point m étant repéré par $(1 - y(t))$ sa vitesse est $-\dot{y}(t)$=-CAexp(-Ct)

La deuxième condition sur les vitesses au départ, se traduit par :

$$\boldsymbol{\dot{x}(0) = -\dot{y}(0) = CA}.$$

Conclusion :

On a entre x et y la relation :

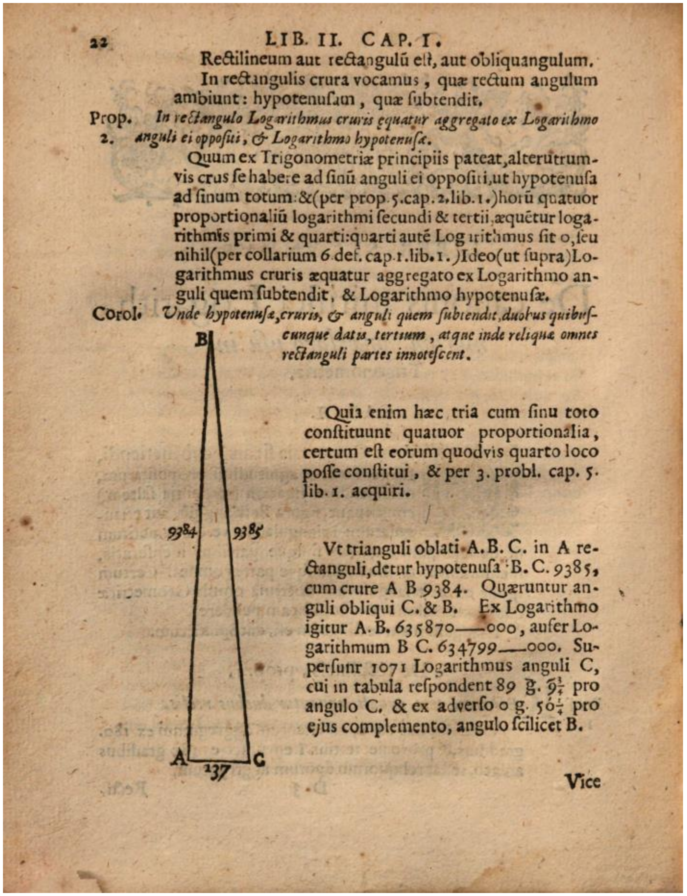
$$y(x) = A\,exp\left(-\frac{x}{A}\right) \quad \text{ou encore}$$

$$\boldsymbol{x(y) = -A\ ln\left(\frac{y}{A}\right)} \quad \textbf{avec} \quad \boldsymbol{A = az = 10^7}$$

La solution de Neper (sous forme tabulée et notée $Nlog$) est :

$$\boldsymbol{Nlog(X) = -10^7\ ln\left(\frac{X}{10^7}\right) = 10^7\left[ln\left(10^7\right) - ln(X)\right]}$$

4-6- La résolution d'un triangle rectangle plat



Rectilineum aut rectangulũ est, aut obliquangulum.

In rectangulis crura vocamus, quæ rectum angulum ambiunt: hypotenusam, quæ subtendit.

Prop. 2. *In rectangulo Logarithmus cruris equatur aggregato ex Logarithmo anguli ei oppositi, & Logarithmo hypotenusæ.*

Quum ex Trigonometriæ principiis pateat, alterutrumvis crus se habere ad sinũ anguli ei oppositi, ut hypotenusa ad sinum totum: &(per prop. 5. cap. 2. lib. 1.) horũ quatuor proportionaliũ logarithmi secundi & tertii, æquẽtur logarithmis primi & quarti: quarti autẽ Logarithmus sit 0, seu nihil (per collarium 6 def. cap. 1. lib. 1.) Ideo (ut supra) Logarithmus cruris æquatur aggregato ex Logarithmo anguli quem subtendit, & Logarithmo hypotenusæ.

Corol. *Unde hypotenusæ, cruris, & anguli quem subtendit, duobus quibuscunque datis, tertium, atque inde reliquæ omnes rectanguli partes innotescent.*

Quia enim hæc tria cum sinu toto constituunt quatuor proportionalia, certum est eorum quodvis quarto loco posse constitui, & per 3. probl. cap. 5. lib. 1. acquiri.

Vt trianguli oblati A.B.C. in A rectanguli, detur hypotenusa B.C. 9385, cum crure A B 9384. Quæruntur anguli obliqui C. & B. Ex Logarithmo igitur A.B. 635870—000, aufer Logarithmum B C. 634799—000. Supersunt 1071 Logarithmus anguli C, cui in tabula respondent 89 g. 9$\frac{3}{4}$ pro angulo C. & ex adverso 0 g. 56$\frac{1}{4}$ pro ejus complemento, angulo scilicet B.

Vice

ABC est rectangle en A

$BC = 9385 \qquad AB = 9384.$

Déterminer les angles $\hat{B}$ *et* $\hat{C}$ *et le côté* AC.

Neper utilise la relation : $\dfrac{\boldsymbol{Sin(\widehat{C})}}{\mathbf{10^7}} = \dfrac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{BC}}$

Donc

Nlog(Sin(C) –Nlog (10^7) = *Nlog(AB) – Nlog(BC)*

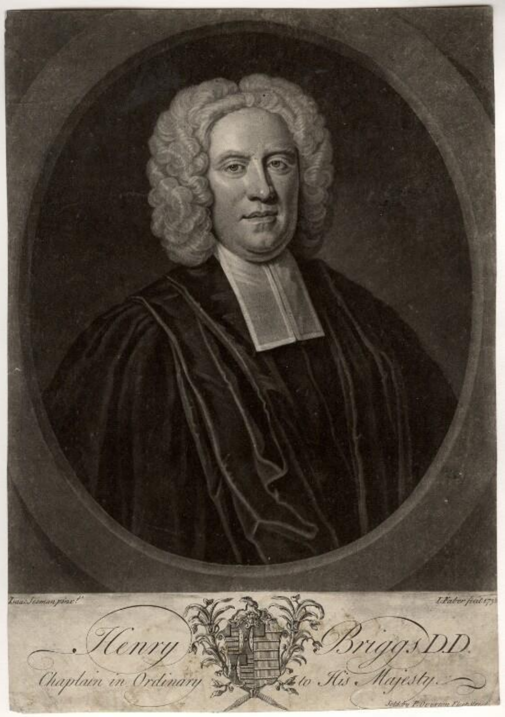
Donc

Nlog(Sin(C) = Nlog(AB) – Nlog(BC)

La détermination de l'angle C se fait alors par une lecture de la table.

5 Contributions de H. Briggs (1561-1630)

Henry Briggs (1561-1630), mathématicien et astronome, acquiert **dès 1614 le «** Mirifici logarithmorum canonis descriptio » **. Il est enthousiasmé par le « Descriptio »**.



A l'université, il expliquait les logarithmes de Neper et indiquait comment on pouvait les modifier en prenant une base différente de celle de Neper (1/e).

Briggs rencontrera Neper à deux reprises, en 1615 et 1616. Il lui propose des simplifications. Neper décèdera en avril 1617.
Il prendra pour sa part l'option du logarithme décimal.

Sur ses conseils, Edward Wright traduira en anglais le « Descriptio ».

5-1- H. Briggs

Henry Briggs va rechercher un système tel que
BriggsLog 1 =0 et BriggsLog 10 = 10^{14}

En 1624, H. Briggs publia ***Arithmetica Logarithmica***, qui contenait les logarithmes de 30 000 nombres avec quatorze décimales exactes.

Puis Briggs travaillera sur le logarithme en base 10, tel que : log 1 = 0 et log 10 =1

ARITHMETICA
LOGARITHMICA
SIVE
LOGARITHMORVM
CHILIADES TRIGINTA, PRO
numeris naturali ſerie creſcentibus ab vnitate ad
20,000 : et a 90,000 ad 100,000. Quorum ope multa
perficiuntur Arithmetica problemata
et Geometrica.

HOS NVMEROS PRIMVS
INVENIT CLARISSIMVS VIR IOHANNES
NEPERVS Baro Merchiſtonij : eos autem ex eiuſdem ſententia
mutavit, eorumque ortum et vſum illuſtravit HENRICVS BRIGGIVS,
in celeberrima Academia Oxonienſi Geometriæ
profeſſor SAVILIANVS.

DEVS NOBIS VSVRAM VITÆ DEDIT
ET INGENII, TANQVAM PECVNIÆ,
NVLLA PRÆSTITVTA DIE.

I R

LONDINI,
Excudebat GVLIELMVS
IONES. 1624.

5-1 Construction de la table de H. Briggs

H. Briggs construit sa table (publiée en 1624) de la manière suivante :

1	10	10^2	10^3	10^m	10^n	10^{m+n} ....
0	1	2	3	m	n	m+n ......

Il prend la moyenne géométrique des termes de la 1ère ligne et la moyenne arithmétique de ceux de la 2ème ligne

1	$\sqrt{10}$	10	$(\sqrt{10})^3$	10^2 ...	10^m	$(\sqrt{10})^{2m+1}$	10^{m+1} ....
0	1/2	1	3/2	2	m	$m+\frac{1}{2}$	$m+1$

Si on itère ce procédé, on obtient des tables de plus en plus précises.
H. Briggs a répété plus de 50 fois le procédé pour obtenir une 1ère suite de raison 10 puissance $\frac{1}{2^{54}}$

Les nombres de la 1ère ligne sont de plus en plus rapprochés et autorisent le calcul par interpolation du logarithme des nombres qui n'y sont pas.

5-2-Calcul de log(2) par quatraine (H. Briggs)

Il remarque qu'il suffit de connaître le nombre de chiffres qui composent 2^n et prendre n très grand.

Si k est le nombre de chiffres de 2^n $\quad 10^{k-1} \leq 2^n < 10^k$

Avec le logarithme en base 10, on a alors

$$\frac{k-1}{n} \leq \log_{10}(2) < \frac{k}{n}$$

Briggs choisit $n=10^{14}$ et calcule ainsi par quatraine

Calcul de 2^{10} $\quad 2^2 = 4 \,;\, 2^4 = (2^2)^2 \,;\, 2^8 = (2^4)^2 \,;\, 2^{10} = 2^8 \times 2^2$

Calcul de 2^{100} $\quad 2^{20} = (2^{10})^2 \,;\, 2^{40} = (2^{20})^2 \,;\, 2^{80} = (2^{40})^2 \,;\, 2^{100} = 2^{80} \times 2^{20}$

Calcul de 2^{100} $\quad 2^{200} = (2^{100})^2 \,;\, 2^{400} = (2^{200})^2 \,;\, 2^{800} = (2^{400})^2 \,;\, 2^{1000} = 2^{800} \times 2^{200}$

Ainsi de suite jusqu'à 10^{15}. $2^{10^{15}}$ contient 301 102 999 566 399 chiffres.

On trouve alors : $\log_{10}(2) = 0,\, 301\ 102\ 999\ 566\ 399$

5-3-Calcul de ln(2) par quatraine (H. Briggs)

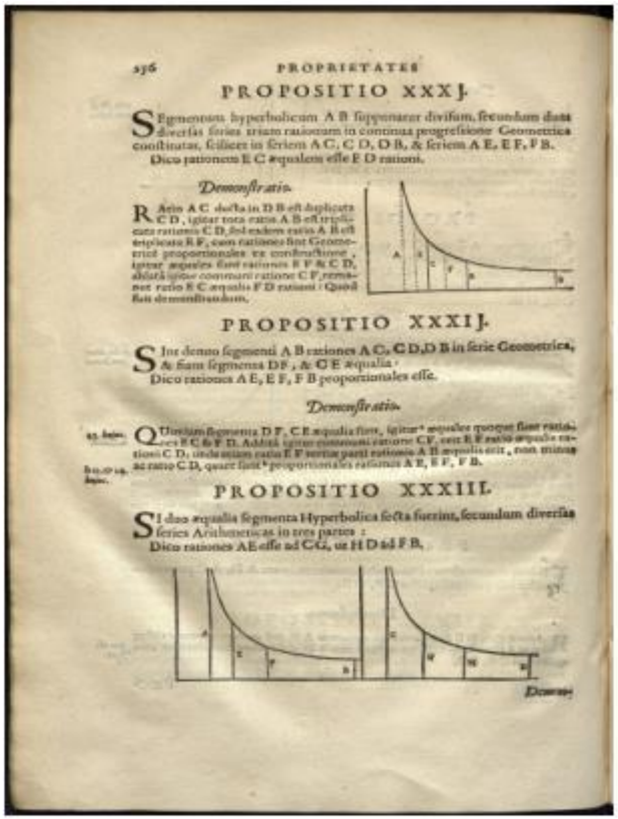
```
def briggs(n):
    '''
    n=14 pour Briggs
    calcul les valeurs des puissances de 2 par quatraine jusqu'à 10^n
    '''
    i=2
    quatraine=0
    a=2
    while 10**quatraine<10**n :
        quatraine=quatraine+1
        a=a**i
        b=a**2
        c=b**2
        d=a*c
        l=len(str(d))
        a=d
    print('2^(10^',quatraine,') admet ',l,'chiffres')

    return
```

5-4 Logarithme et Euler

Dans son *Introduction à l'analyse infinitésimale*, **Léonhard Euler** (1707-1783) reprend les travaux de Briggs donne un algorithme pour calculer **logarithme de 5.**

Cet algorithme se généralise pour calculer tous les logarithmes décimaux entre 1 et la base B du logarithme souhaité
(**c'est le principe de dichotomie**).

Quadrature de l’hyperbole par Grégoire de Saint Vincent


536 PROPRIETATES

PROPOSITIO XXXI.

Demonstratio.

PROPOSITIO XXXII.

Demonstratio.

PROPOSITIO XXXIII.

Saint-Vincent ne fait pas référence au logarithme, c’est son ami Sarasa qui signale le comportement logarithmique de l’aire sous l’hyperbole (1649).
G.Saint-Vincent sera très critiqué notamment par Marin Mersenne (français 1588-1648),
il est reconnu par G.W.Leibniz (allemand 1646-1716) qui dira que « Saint-Vincent n’a pas résolu entièrement la quadrature de l’hyperbole, il n’en reste pas moins qu’il a livré des résultats remarquables. »

Bibliographie

[1] Gilbert ARSAC, Histoire de la découverte des logarithmes. Bulletin de l'APMEP n° 299, Juin 1975, (téléchargeable en pdf sur le site de l'APMEP).

[2] Evelyne BARBIN, Jean-Pierre FRIEDELMEYER, Michel GUILLEMOT (2006) and co Histoires De Logarithmes, (ouvrage collectif)

[3] André BONNET, Neper a-t-il vraiment inventé les logarithmes népériens ?, diaporama (Apmep, université de Provence) 2017 : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/JR_Apmep_13-05-2017.pdf

[4] André BONNET, Article , Bulletin Vert n°524 :https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA17039.pdf

[5] Stephane MIRBEL, académie de Limoges : Histoire de la fonction logarithme : http://pedagogie.ac-limoges.fr/maths/IMG/pdf/ressources_pour_le_lycee_-_mathcomple_mentaire_-_histoire_de_la_fonction_logarithme_v3-perso.pdf

[5] Revue *Repères IREM* n°21, Octobre 1995, Les logarithmes de BRIGGS, Jean-Marie FAREY et Patrick PERRIN.

[6] *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, John Napier, 1614.

[7] *Rabdologiae seu numerationis per virgulas*, John Napier, 1617.

[8] *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, John Napier, 1619.

Sites

Les textes originaux de Neper ([6] et [8] (versions anglaise et latine réécrites) sont téléchargeables sur le site :

http://www.17centurymaths.com/contents/napiercontents.html

Le manuscrit de Jost Burgi et sa table peuvent être obtenus sur le site de Springer :

http://www.springer.com/us/book/9781493931606

Quelques dates

REGIOMONTANUS	1436 - 1476
Luca PACIOLI	1445 - 1517
Simon JACOB	- 1564
Michael STIFEL	1486 - 1567
Simon STEVIN	1548 - 1620
Edward WRIGHT	1580 - 1615
Nicolas COPERNIC	- 1543
Tycho BRAHÉ	1546 - 1601
Johanes KEPLER	1571 - 1630
Joost BÜRGI	1552 – 1632
Henry BRIGGS	1561 - 1630
Galileo GALILÉE	1564 - 1642
John NAPIER	1580 - 1617