ATELIER ÉQUATIONS

Lycée Val de Durance, Pertuis
Vendredi 2 février 2024

Martine BOSC
Jean-Louis MALTRET

Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université
IRES

Les méthodes arithmétiques de l'Antiquité

- **La résolution d'un problème se ramenant à une équation du second degré**

(Tablette paléo-babylonienne BM 13901, vers -1900)

La surface du carré ajoutée au côté égale 45 $x^2 + x = 45$ $x^2 + bx = c$ (b = 1 et c = 45)

tu poseras 1 l'unité

tu fractionneras 1 en 2, on trouve 30 $\frac{b}{2} = 30$

tu croiseras par 30, on trouve 15 $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 15$

tu ajouteras 15 et 45, on trouve 1, c'est le carré de 1 $\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = 1$

tu soustrairas de 1 les 30 que tu as croisés,

on trouve 30 c'est le côté du carré. $\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2} = 30$

Faculté des Sciences Aix-Marseille Université | IRES

Les méthodes arithmétiques de l'Antiquité

- **La technique de la fausse position pour les problèmes linéaires**

Le problème 26 du Papyrus de Rhind (XVIe siècle avant notre ère)

Problème

Une quantité et son quart font 15. Quelle est la quantité ?

Solution :

calcule avec 4 ; prends le quart, 1 ; ensemble 5 ;

calcule avec 5 pour obtenir 15 : 3 enfin fais la multiplication 4 × 3 = 12

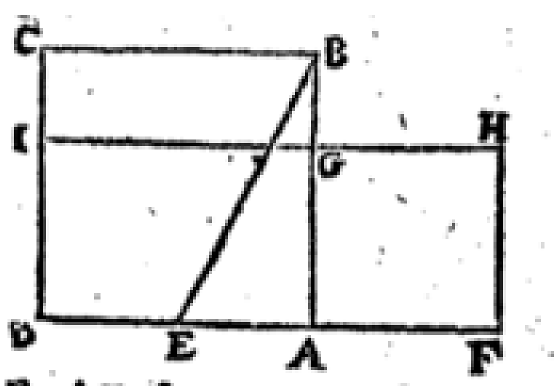
$$\begin{cases} ax = b \\ ax_0 = b_0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{b}{ax_0} \times x_0$$

La technique géométrique des grecs

Un exemple du second degré : Euclide Livre II proposition 11

Coupper vne ligne droicte donnee, tellement que le rectangle de la toute, & de l'vne des parties, soit egal au quarré de l'autre partie.

Traduction Henrion 1632



Partager un segment en extrême et moyenne raison :
Soit a la longueur du segment à partager et x la longueur de la plus grande des 2 parties ($x \neq 0; x \neq a$), on doit avoir :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Leftrightarrow x^2 + ax = a^2$$

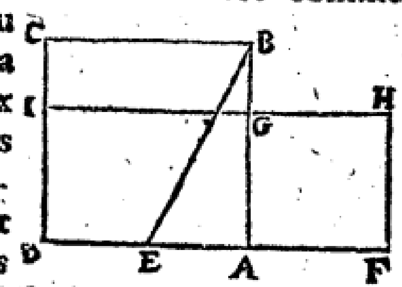
Un exemple du second degré : Euclide Livre II proposition 11

Construction

Apres auoir conſtruict ſur icelle A B le quarré A C, ſoit diuiſée AD en deux egalement au poinct E, & apres auoir mené EB, & prolongé E A vers F, tellement que EF ſoit egale à EB; ſur A F ſoit faict le quarré AH; & ſoit continuée HG iuſques en I. Ie dis que la ligne AB eſt couppee au poinct G, en ſorte que le rectangle CG, compris de B C egale à BA, & de BG partie de B A, eſt egal au quarré de l'autre partie AG, ſçauoir eſt à G F.

Justification

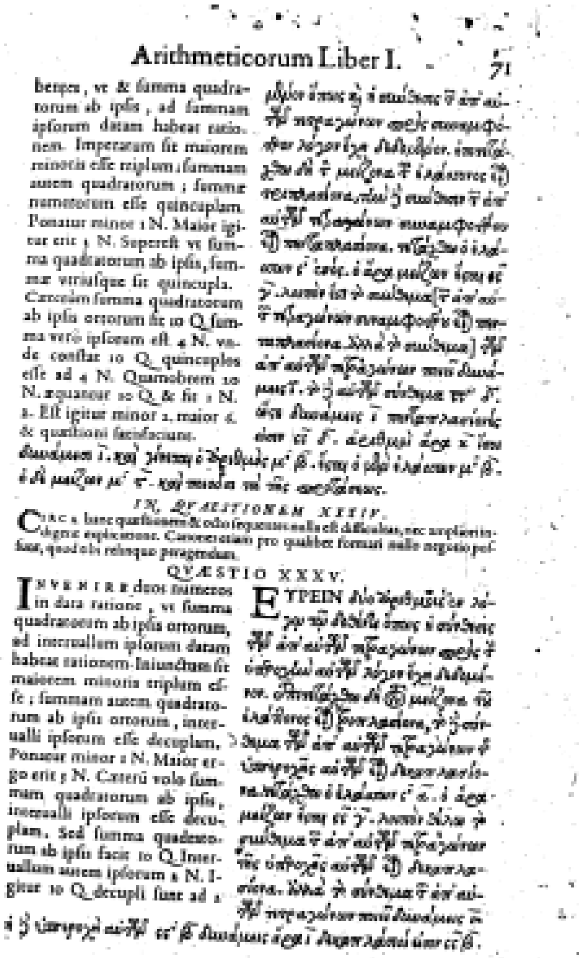
Car la ligne AD eſtant couppee en deux egalement en E, & on luy adiouſte directement AF, le quarré de la moitié & de l'adiouſtée comme d'vne, ſçauoir EF, ou de ſon egale EB, eſt egal au rectangle de DF, AF, & au quarré de A E par la 6. p. de ce liure. Mais le quarré de EB eſt egal aux deux de B A & A E par la 47. prop. 1. ainſi les deux quarrez de B A & A E, ſeront egaux au rectangle de D F, A F, & au quarré de AE: oſtant donc le quarré de AE commun, les demeurans



quarré de AB, ſçauoir A C, & le rectangle de DF, AF, ſçauoir F I, ſeront egaux; deſquels AC & FI, ſi on oſte le rectangle commun AI; le demeurant quarré FG, ſera egal au demeurant rectangle GC. Parquoy nous auons coupé la ligne droicte AB en G, tellement que le rectangle d'icelle & de la partie GB eſt egal au quarré de l'autre partie AG. Ce qu'il falloit faire.

Soit [AB] le segment à partager, Après avoir construit le carré ABCD,
Il place E le milieu de [AD] Puis F sur [DA) tel que EF = EB
Puis construit le carré AFGH. G est le point qui partage [AB] en extrême et moyenne raison

Les équations dans *Les Arithmétiques* de Diophante d’Alexandrie –IIIe siècle



- **13 livres (6 en grec et 4 en arabe)**
- **189 problèmes non issus de la vie courante**
- **Problèmes se ramenant à des équations de degré 1 ou 2**
- **Solutions positives entières ou fractionnaires**

Proposition I.27 : « *Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés* ».
Proposition I.28 : « *Trouver deux nombres tels que leur somme et la somme de leurs carrés forment des nombres donnés* ».
Proposition I.30 : « *Trouver deux nombres tels que leur différence et leur produit forment des nombres donnés* ». [Ver Eecke, 1926, pp. 36-40].

irem Aix-Marseille

Traduction bilingue latin-grec
Claudio Gaspare Bacheto, BNF

Les équations
dans *Les Arithmétiques* de Diophante

Les mots sont remplacés par des symboles

L'arithme x	ζ,
x^2	Δ^Y
x^3	K^Y

« 4 carrés joints à trois nombres font 10 »	$4x^2 + 3x = 10$	$\Delta^Y\delta\ \zeta\gamma\ \varepsilon\sigma\tau\iota\ \iota$

Diophante père de l'algèbre ?

Le premier à utiliser un symbolisme mais :

Pour le second degré,

- il ne donne pas de règle de résolution de l'équation complète,
- il ne décrit pas la méthode qui lui a permis de trouver la résolution.

Proposition I.27 « Trouver 2 nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés »

Énoncé général

Il faut toutes fois que le carré de la demi-somme des nombres excède d'un carré le produit de ces nombres

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 > xy + a^2$$

Condition d'existence des solutions

Proposons que la somme des nombres soit 20 et leur produit 96

Proposition d'un un cas particulier

Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités et que leur produit forme 96 unités.

Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes. Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc, si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'établit de nouveau que la somme des nombres est 20 unités et que leur excédent est 2 arithmes. En conséquence, posons que le plus grand nombre est 1 arithme augmenté des 10 unités qui sont la moitié de la somme des nombres ; donc le plus petit sera 10 unités moins 1 arithme, et il s'établit que la somme des nombres est 20 unités et que leur excédent est 2 arithmes.

Il faut aussi que le produit des nombres forme 96 unités. Or leur produit est cent unités moins 1 carré d'arithme ; ce que nous égalons à 96 unités, et l'arithme devient 2 unités. En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités, le plus petit sera 8 unités, et ces nombres satisfont à la proposition » [Ver Eecke, 1926, pp. 36-38].

Résolution du un cas particulier

Source : Repères IREM n°53

Les équations de degré 1 et 2 par Al Khwarismi (780 – 850)

La naissance de l'algèbre : une volonté de trouver des règles générales et de les démontrer, au lieu de se contenter de cas particuliers.

- **Un ouvrage à vocation pédagogique : « *Kitâb al-jabr wa al-muqâbala* »**
  « Ouvrage sur le calcul de gabr et de muqabala »

«… les aider à éclaircir ce qui était impénétrable et à faciliter ce qui était difficile, m'ont exhorté à composer dans le calcul de l'al-jabr wa al-muqabala un livre concis »

- **1re partie : la théorie**
- **2e partie : les problèmes pratiques (héritages,…)**

Faculté des Sciences Aix-Marseille Université | IRES

Les équations de degré 1 et 2 par Al Khwarismi (780 – 850)

La naissance de l'algèbre :
une volonté de trouver des règles générales
et de les démontrer, au lieu de se contenter de cas particuliers.

« Kitâb al-jabr wa al-muqâbala »
« Ouvrage sur le calcul de gabr et de muqabala »

« *al-gabr* » : restauration

(addition aux deux membres de l'équation des termes égaux à ceux qui sont affectés du signe moins, de façon à n'avoir plus que des termes positifs)

« *al-muqabala* » : comparaison

(réduction des termes semblables)

«*hatt* » : division

(de chaque terme par un même nombre)

Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université
IRES

Pour les équations du second degré, il distingue 3 sortes de nombres :
Les nombres simples, les racines (ou choses) et les carrés.

dirham (monaie) — *gezr* — *chay* — *al-mahal (bien, fortune)*

chay → en Espagne : *xay* → *x* (XVIIe siècle)

chay → *cosa* (XVIe siècle) en Italie

Tous les textes sont écrits avec des mots sous forme de poème.

Une classification des types des équations en 6 types

– *les carrés sont égaux aux racines,* $ax^2 = bx$,
– *les carrés sont égaux à un nombre,* $ax^2 = c$,
– *les racines sont égales à un nombre,* $bx = c$,
– *les carrés et les racines sont égaux à un nombre,* $ax^2 + bx = c$,
– *les carrés et les nombres sont égaux aux racines,* $ax^2 + c = bx$,
– *les racines et les nombres sont égaux aux carrés,* $bx + c = ax^2$.

Faculté des Sciences Aix-Marseille Université | IRES

Les résolutions sont géométriques, à la manière des grecs

Exemple pour l'équation $x^2 + 10x = 39$

« Que le carré et dix racines égalent 39 unités »

« *La règle est que tu divises les racines en deux moitiés, ici on obtient 5,*
que tu multiplies par lui-même, on a 25
que tu ajoutes à 39 et on obtient 64.
Tu prends la racine qui est 8,
tu en retranches la moitié du nombre des racines qui est 5,
il en vient 3 qui est la racine du carré que tu cherches,
le carré est 9. »

$$x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2} = 3$$

$$x = 9$$

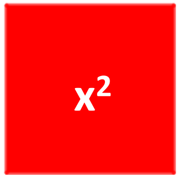
Faculté des Sciences Aix-Marseille Université | IRES

Les résolutions sont justifiées géométriquement, à la manière des grecs

Exemple pour l'équation $x^2 + bx = c$

La technique de la complétion du carré

Il trace un carré (de côté x)

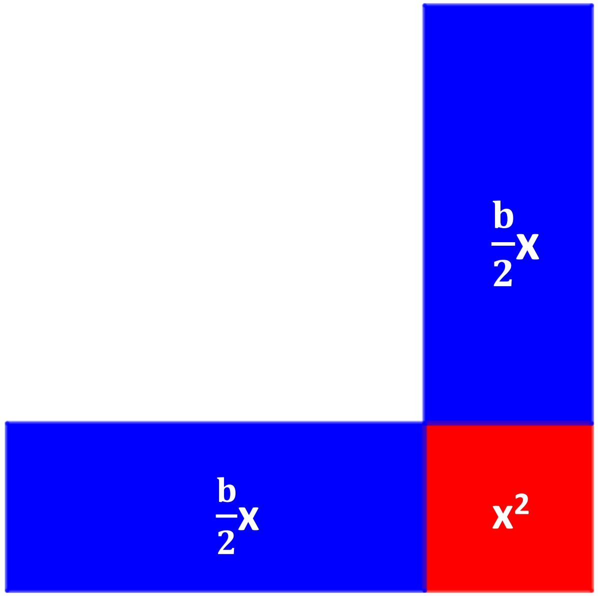


Faculté des Sciences Aix-Marseille Université | IRES

Les résolutions sont justifiées géométriquement, à la manière des grecs

Exemple pour l'équation $x^2 + bx = c$

Il lui adjoint 2 rectangles (de côtés x et $\frac{b}{2}$) de façon à former un gnomon (d'aire $x^2 + bx$)

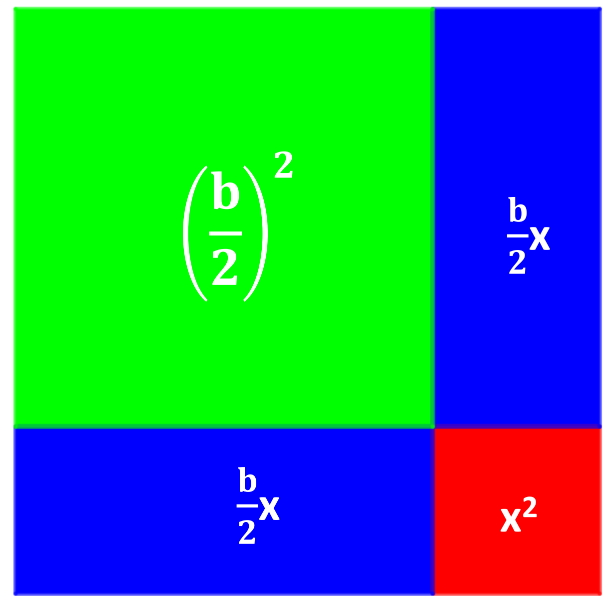


Faculté des Sciences Aix-Marseille Université | IRES

Les résolutions sont justifiées géométriquement, à la manière des grecs

Exemple pour l'équation $x^2 + bx = c$

Il complète la figure avec un carré (d'aire $\left(\frac{b}{2}\right)^2$)
De façon à former un grand carré dont il calcule l'aire de 2 façons.

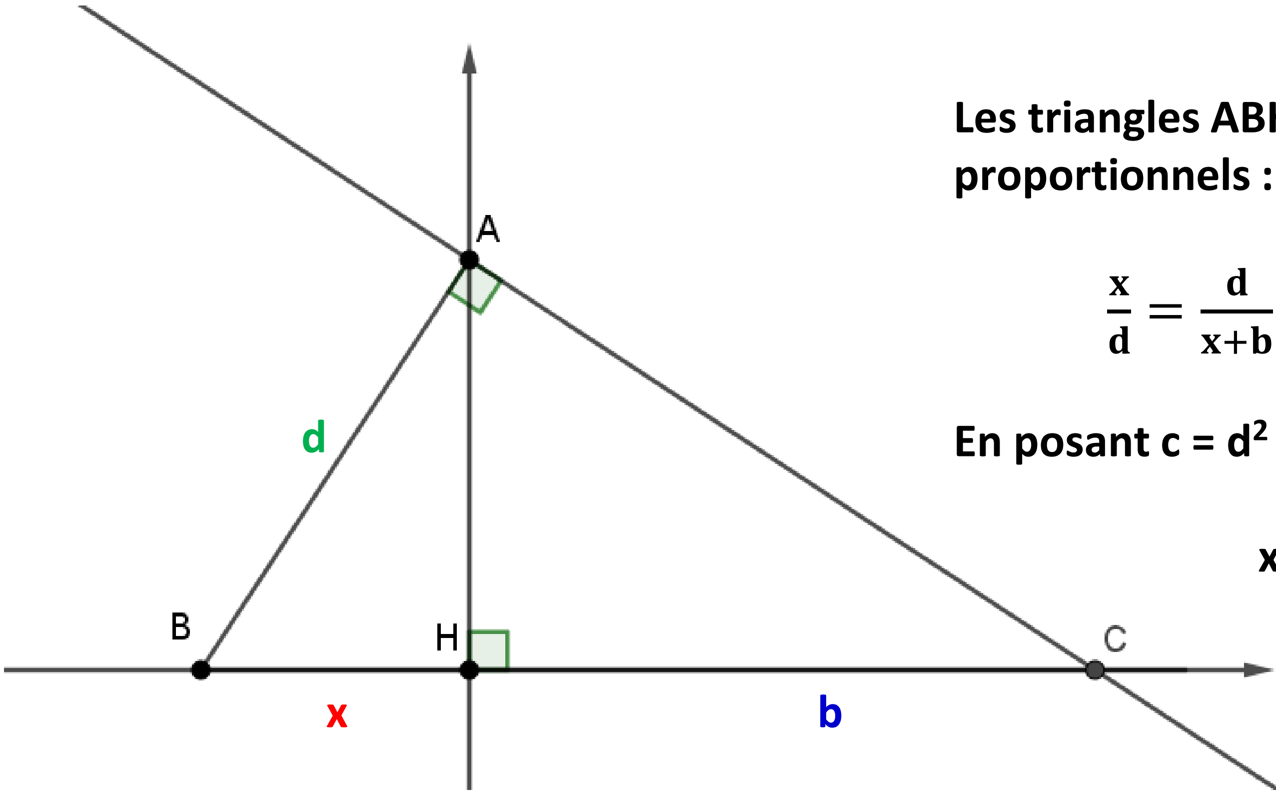


$$\left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 = c + \left(\frac{1}{2}b\right)^2$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

L’équerre d’Al-Khwarismi : la théorie

Soit un triangle rectangle, A le sommet de l'angle droit, B le sommet sur l'axe horizontal gauche, C le sommet sur l'axe horizontal droit, H le pied de la hauteur issue de A.
On note : $x = BH$, $b = HC$ et $d = AB$



Les triangles ABH et CBA ont leur côtés proportionnels :

$$\frac{x}{d} = \frac{d}{x+b} \Longleftrightarrow x(x+b) = d^2$$

En posant $c = d^2$ on obtient l’équation

$$x^2 + bx = c$$

L'équerre d'Al-Khwarismi : le mode d'emploi

Soit une équation du second degré $x^2+bx=c$ $b,c > 0$.

Pour trouver sa solution positive on pose l'équerre graduée sur la planchette en respectant trois conditions :

- **le côté non gradué doit être sur la valeur correspondant à b de l'axe horizontal bleu**
- **le sommet de l'angle droit doit être sur l'axe vertical**
- **la valeur correspondant à c du côté gradué doit être sur l'axe horizontal rouge**

On lit alors la valeur de x sur l'axe horizontal rouge

Exemples :

$x^2+x = 20$ $x^2+4x = 12$ $x^2+5x = 6$

$x^2+6x = 16$ $x^2+9x = 36$ $x^2+2x = 15$

Faculté des Sciences Aix-Marseille Université | IRES

La technique graphique de Ménechme

Un exemple de degré 3 : Le problème de Délos

bulletin Inter-IREM Épistémologie : traduction littérale et texte grec

Ménechme.

·it A et E les deux segments de droite donnés ; il faut ·ver deux moyennes proportionnelles entre A et E.

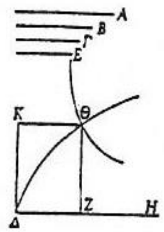


Fig. 31.

Supposons le problème résolu, et soit B et Γ (sc. les moyennes proportionnelles cherchées) ; soit ΔH une demi-droite, issue de Δ, donnée par sa position ; portons sur elle à partir de Δ le segment ΔZ égal à Γ, élevons la perpendiculaire en Z et portons sur elle ZΘ égal au segment B. Du moment donc que les trois segments A, B et Γ sont proportionnels, le rectangle de côtés A et Γ est équivalent au carré sur B, d'où il suit que le rectangle ayant pour côtés les segments donnés A et Γ, c'est-à-dire A et ΔZ, est équivalent au carré sur B, c'est-à-dire au carré sur ZΘ. Le point Θ est donc situé sur une parabole[1] passant par le point Δ. Menons les parallèles ΘK et ΔK. Comme le rectangle de côtés B et Γ est donné, étant égal au rectangle de côtés A et E, le rectangle de côtés KΘ et ΘZ est à son tour donné. Le point Θ est donc situé sur une hyperbole[2] d'asymptotes KΔ et ΔZ. Il s'ensuit que le point Θ et, partant, aussi le point Z, est donné.

Le problème sera dès lors composé de la manière que voici. Soit A et E les segments de droite donnés, ΔH la demi-droite issue de Δ ; faisons passer par Δ une parabole ayant pour axe ΔH et pour paramètre A ; que les

ʽΩς Μέναιχμος.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ Α, Ε· δεῖ δὴ τῶν Α, Ε δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν.

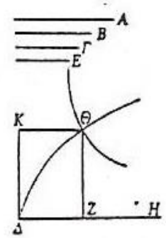


Fig. 31.

Γεγονέτω, καὶ ἔστωσαν αἱ Β, Γ, καὶ ἐκκείσθω θέσει εὐθεῖα ἡ ΔΗ πεπερασμένη κατὰ τὸ Δ, καὶ πρὸς τῷ Δ τῇ Γ ἴση κείσθω ἡ ΔΖ, καὶ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΘ, καὶ τῇ Β ἴση κείσθω ἡ ΖΘ. Ἐπεὶ οὖν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β· τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης τῆς Α καὶ τῆς Γ, τουτέστι τῆς ΔΖ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ. Ἐπὶ παραβολῆς ἄρα τὸ Θ διὰ τοῦ Δ γεγραμμένης. Ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ ΘΚ, ΔΚ. Καὶ ἐπεὶ δοθὲν τὸ ὑπὸ Β, Γ, ἴσον γάρ ἐστι τῷ ὑπὸ Α, Ε, δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΚΘΖ. Ἐπὶ ὑπερβολῆς ἄρα τὸ Θ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς ΚΔ, ΔΖ. Δοθὲν ἄρα τὸ Θ· ὥστε καὶ τὸ Ζ.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως. Ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ Α, Ε, ἡ δὲ τῇ θέσει ἡ ΔΗ πεπαρασμένη κατὰ τὸ Δ, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ Δ παραβολή, ἧς ἄξων μὲν ἡ ΔΗ, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ Α, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΔΗ ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ δυνάσθωσαν τὰ παρὰ τὴν Α παρακείμενα χωρία πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας

Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université
IRES

La technique graphique de Ménechme

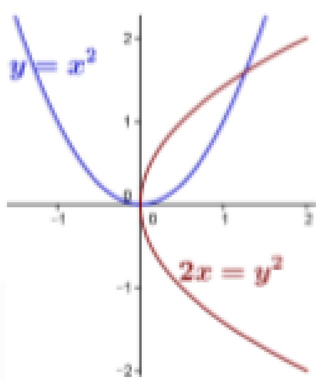
Un exemple de degré 3 : Le problème de Délos

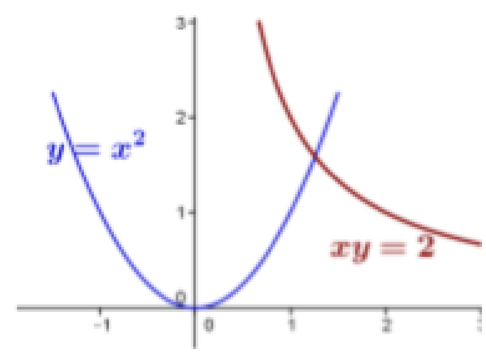
Il résout le problème en s'intéressant au problème de l'insertion de 2 moyennes proportionnelles entre 2 nombres a et b :

Trouver 2 nombres x et y tels que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$

dont il déduit l'équation $x^3 = a^2 b$ **soit pour le problème de Delos :**

$$x^3 = 2$$





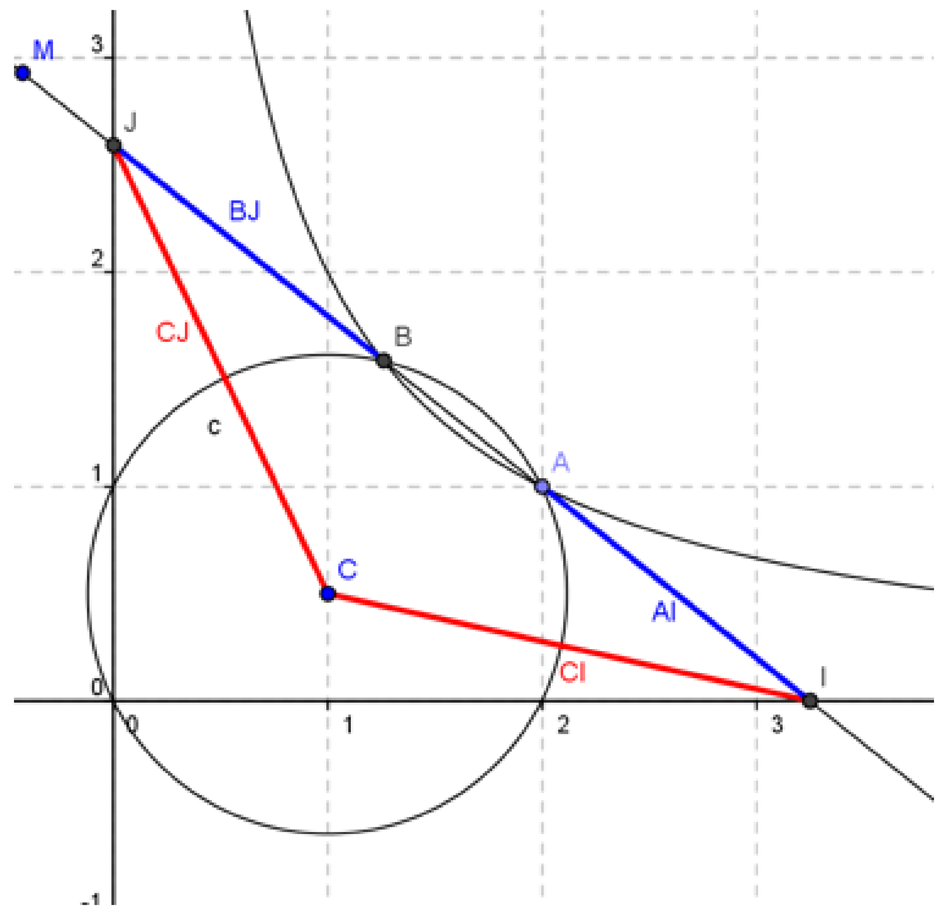
Apollonius reprend les travaux de Ménechme

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

dont il déduit $\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = bx \\ xy = ab \end{cases}$

puis $\begin{cases} x^2 + y^2 = bx + ay \\ xy = ab \end{cases}$

Philon : AI = BJ
Héron : CI = CJ



Faculté des Sciences Aix-Marseille Université | IRES

Al Khayyam (1048 – 1131)

Un ouvrage sur les équations de degré 3

Risāla fī'l-barāhīn ‹ala masā'il al-jabr wa'l-muqābala
(Samarcande ,1070)

Faculté des Sciences Aix-Marseille Université | IRES

Al Khayyam (1048 – 1131)

Une classification des équations de degré 3

Les résolutions algébriques ne s'effectuent qu'à l'aide de l'équation, c'est-à-dire en égalant ces degrés les uns aux autres, comme cela est bien connu. Si l'algébriste emploie le carré-carré dans des problèmes de mesure, cela doit s'entendre métaphoriquement et non pas proprement, puisqu'il est absurde que le carré-carré soit au nombre de grandeurs mesurables. Ce qui rentre dans la catégorie des grandeurs mesurables, c'est d'abord une dimension, à savoir la racine, ou par rapport à son carré, le côté ; puis deux dimensions : c'est la surface ; et le carré (algébrique) fait partie des grandeurs mesurables, étant la surface carrée. Enfin trois dimensions : c'est le solide ; et le cube se trouve parmi les grandeurs mesurables, étant le solide terminé par six carrés...

$$x^3 = c$$
$$x^3 + bx = c$$
$$x^3 + c = bx$$

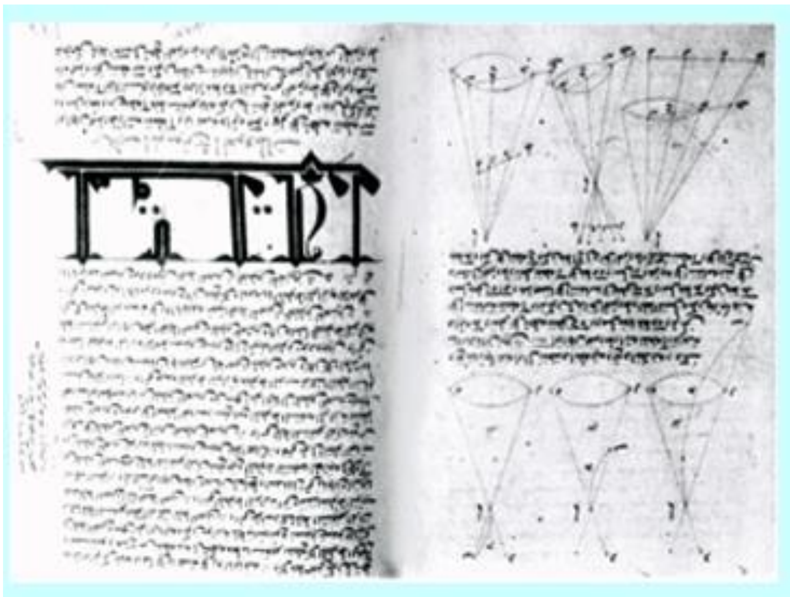
$$x^3 = bx + c$$
$$x^3 + ax^2 = c$$
$$x^3 + c = ax^2$$

$$x^3 = ax^2 + c$$
$$x^3 + ax^2 + bx = c$$
$$x^3 + ax^2 + c = bx$$
$$x^3 + bx + c = ax^2$$
$$x^3 = ax^2 + bx + c$$
$$x^3 + ax^2 = bx + c$$
$$x^3 + bx = ax^2 + c$$
$$x^3 + c = ax^2 + bx$$

Faculté des Sciences Aix-Marseille Université | IRES

Al-Khayyam et les coniques

« Il faut bien savoir que ce traité ne sera compris que de ceux qui maîtrisent le livre d'Euclide sur les **Éléments** *[…], ainsi que les deux premiers livres de l'ouvrage d’Appolonius sur les coniques.*
Celui à qui la connaissance d'un de ces trois livres fait défaut ne peut avoir accès à la compréhension de ce traité. Je me suis du reste appliqué, avec peine, à ne renvoyer qu'à ces trois ouvrages. »



l’Appolonius traduit en arabe

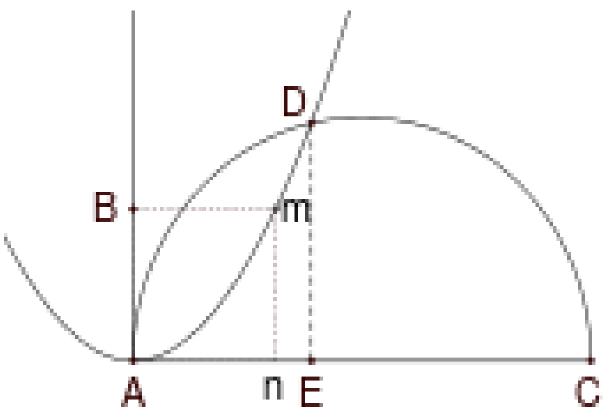
- **Un tracé point par point**
- **Pas de théorie sur les équations des coniques**

Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université
IRES

Al Khayyam (1048 – 1131)

Une méthode graphique de résolution des équations de degré 3

L'exemple de l'équation $x^3 + bx = c$



$AB^2 = b$, $AC \times AB^2 = c$, ABmn est un carré. Le demi-cercle de diamètre [AC] rencontre la parabole, de sommet A, d'axe (AB) perpendiculaire à (AC) et passant par m, en D.

Le point D se projette orthogonalement sur [AC] en E. La distance AE est solution de l'équation.

- **Est-ce vrai ?**
- **Comment a t-il choisi les coniques ?**

Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université
IRES

Comment a-t il trouvé les coniques ?

L'exemple de l'équation $x^3 + bx = c$

1. L'équation est transformée en égalité de rapports $\frac{M_1}{M_2} = \frac{N_1}{N_2}$	$\left(\frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2 = \frac{x}{\frac{c}{b} - x}$
2. Intervention d'une inconnue auxiliaire : y, moyenne proportionnelle entre N_1 et N_2	$\frac{x}{y} = \frac{y}{\frac{c}{b} - x}$
3. Obtention d'une double égalité (E)	(E) : $\frac{\sqrt{b}}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{\frac{c}{b} - x}$
4. Trois choix possibles pour les coniques	Parabole : $y = \frac{1}{\sqrt{b}} x^2$ Cercle : $x^2 + y^2 - \frac{c}{b} x = 0$ Hyperbole : $y = \frac{\frac{c}{\sqrt{b}} - x}{x}$

Comment a-t il trouvé les coniques ?

L'exemple de l'équation $x^3 + bx = c$

1. L'équation est transformée en égalité de rapports $\frac{M_1}{M_2} = \frac{N_1}{N_2}$	$\left(\frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2 = \frac{x}{\frac{c}{b} - x}$
2. Intervention d'une inconnue auxiliaire : y, moyenne proportionnelle entre N_1 et N_2	$\frac{x}{y} = \frac{y}{\frac{c}{b} - x}$
3. Obtention d'une double égalité (E)	(E) : $\frac{\sqrt{b}}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{\frac{c}{b} - x}$
4. Trois choix possibles pour les coniques	**Parabole :** $y = \frac{1}{\sqrt{b}} x^2$ **Cercle :** $x^2 + y^2 - \frac{c}{b} x = 0$ Hyperbole : $y = \frac{\frac{c}{\sqrt{b}} - x}{x}$

Faculté des Sciences Aix-Marseille Université | IRES

Pour en savoir plus …

- **Les 4 panneaux de l'exposition « Regards sur les mathématiques-Itinéraires méditerranéens » sur l'algèbre**

- **Le magistère d'Aix-Marseille « Des nombres aux équations »**

- **« L'histoire de l'algèbre et des équations algébriques jusqu'au dix-neuvième siècle » par Eliane Cousquer**

- **La thèse de Nicolas Farès « *Note sur le choix des courbes fait par al-Khayyam dans sa résolution des équations cubiques et comparaison avec la méthode de Descartes* ».**

- ***https://culturemath.ens.fr/thematiques/lycee/les-equations-canoniques-d-al-khawarizmi***

- ***https://culturemath.ens.fr/thematiques/lycee/l-algebre-arabe-entretien-avec-ahmed-djebbar***

Faculté des Sciences Aix-Marseille Université | IRES