Compétition interclasses de 3ème et de 2nde
organisée avec le concours de l'Inspection Pédagogique Régionale, l'IREM et l'association rallye mathématiques sans frontières

ACADEMIE D'AIX-MARSEILLE

Mathématiques sans frontières

Epreuve du 24 février 2005

- ✓ **Ne prendre qu'une feuille-réponse par exercice.**
- ✓ **Des explications ou des justifications sont demandées pour tous les exercices sauf pour les numéros 2, 4, 6, 7 et 11.**
- ✓ **Toute solution même partielle sera examinée.**
- ✓ **Le soin sera pris en compte.**

Exercice 1 : 7 points

Changez de place !

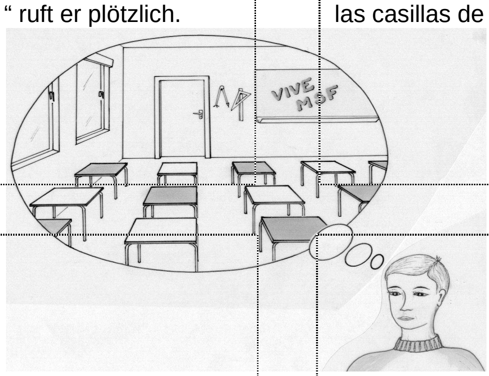
Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots.

In einem Klassenzimmer stehen in 5 Reihen jeweils 5 Einzeltische. Der Lehrer möchte, dass seine 25 Schüler die Plätze tauschen, indem sich jeder entweder auf den Platz davor, dahinter, rechts oder links setzt.
Peter weiβ, dass sein Lehrer die Schüler gerne reinlegt. Er stellt sich die Tische wie ein Schachbrett vor, abwechselnd weiβ und schwarz.
"Was Sie verlangen, geht gar nicht! " ruft er plötzlich.
"Und ich kann es Ihnen beweisen !"

Schreibt die Begründung von Peter auf, welche zeigt, dass ein solcher Platztausch unmöglich ist.

En una clase, hay 5 filas de 5 mesas individuales. El profesor pide a sus 25 alumnos que cambien de sitio respetando la consigna siguiente : cada uno tendrá que ir o delante, o detrás, o a la izquierda o a la derecha de donde estaba sentado.
Pedro sabe que a su profesor le gusta bromear. Imagina que las mesas son alternativamente de 2 colores como las casillas de un tablero...
"¡ Lo que Usted nos pide es imposible !" dice Pedro "se lo voy a demostrar".

Escribe el razonamiento de Pedro quien demuestra la imposibilidad de tal movimiento.



In una classe ci sono 5 file ciascuna con 5 tavoli. Il professore chiede ai suoi 25 studenti di spostarsi seguendo l'indicazione :
"ognuno si sieda davanti o dietro o a destra o a sinistra del posto che sta occupando".
Piero sa che il prof scherza volentieri. Immagina che i tavoli siano alternativamente di due colori, come nella scacchiera.
"Ciò che ci chiede è impossibile" replica "ed io posso provarlo".

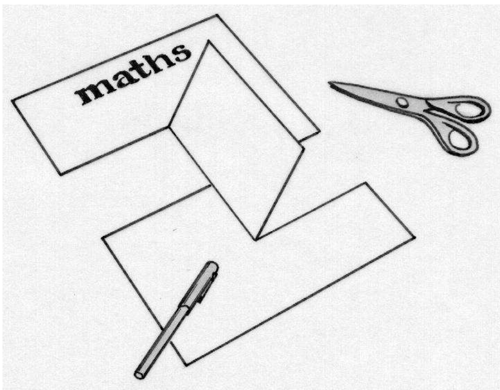
Riprodurre il ragionamento per mezzo del quale Piero riesce a dimostrare l'impossibilità di un tale movimento.

In a classroom there are 5 rows of 5 individual tables. The teacher asks his 25 pupils to change seats obeying the following order:
each pupil will either take the seat in front or behind the seat he occupies or take the one on his right or left.
Peter knows that his teacher often plays jokes. He imagines that the tables have two colours alternately, just like the squares of a checkerboard.
"What you ask us to do is impossible, he then exclaimed, and I can prove it !"

Write Peter's thought process, which proves that such a movement is impossible.

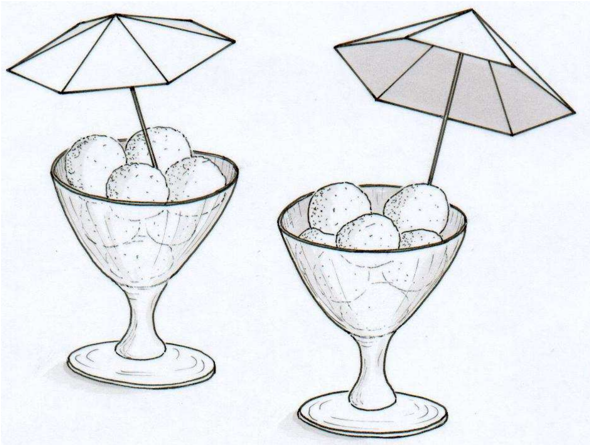
Exercice 2 : 5 points

Papel'Art



Sur le bureau d'Anne-Marie, Michel a trouvé une feuille de papier découpée et pliée de façon surprenante, sans aucun collage. Voir la figure ci-contre.

Découper, puis plier de la même façon la feuille-réponse. On veillera bien à la garder d'un seul tenant.



Exercice 3 : 7 points

Parapli

Pour décorer un repas d'anniversaire, Icare fabrique des parasols en papier sur le modèle suivant :

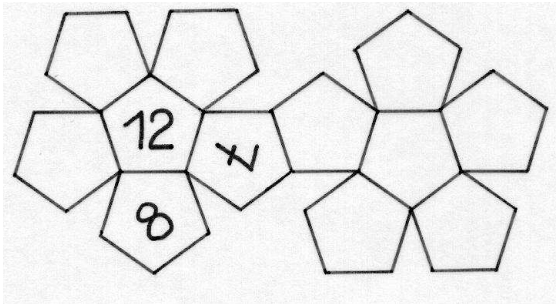
Le parasol a la forme d'une pyramide dont la base est un hexagone régulier de 5 cm de côté. Les 6 faces qui le constituent sont des triangles isocèles superposables.
Les arêtes issues du sommet de la pyramide mesurent 6 cm.

Réaliser en un seul morceau un patron de ce parasol et le coller sur la feuille-réponse. Calculer à 1 mm près la hauteur de la pyramide ainsi formée.

Exercice 4 : 5 points

Des dés à Dédé

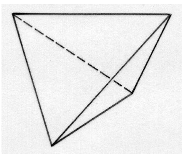
Dédé, grand amateur de jeux de société, possède une belle collection de dés. L'un d'eux est en forme de dodécaèdre. Ce dé a douze faces, qui sont des pentagones réguliers, deux à deux parallèles et numérotées de 1 à 12. Comme pour un dé à six faces, la somme des nombres sur deux faces parallèles doit toujours être la même.

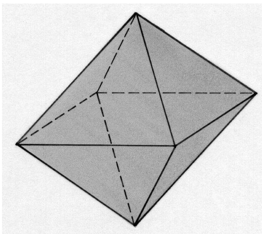


Reproduire le patron d'un tel dé et numéroter les faces.

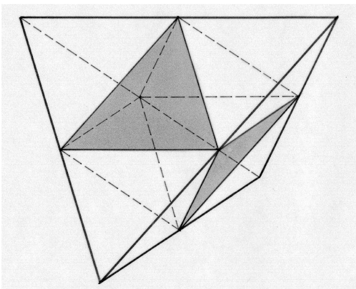
Exercice 5 : 7 points

Remplissage

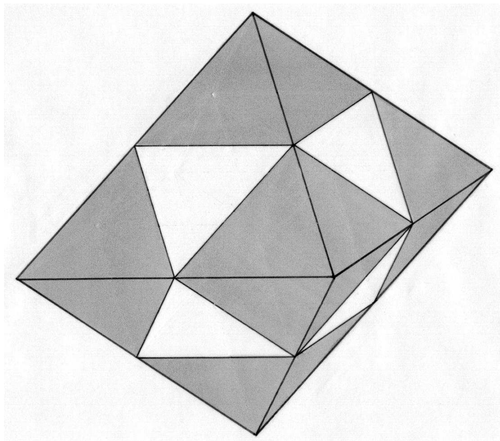




La figure ci-dessus représente un tétraèdre T_1 et un octaèdre O_1. Toutes leurs faces sont des triangles équilatéraux de côté 1.



Ci-dessus le remplissage d'un tétraèdre T_2 d'arête 2 par des tétraèdres T_1 et un octaèdre O_1.



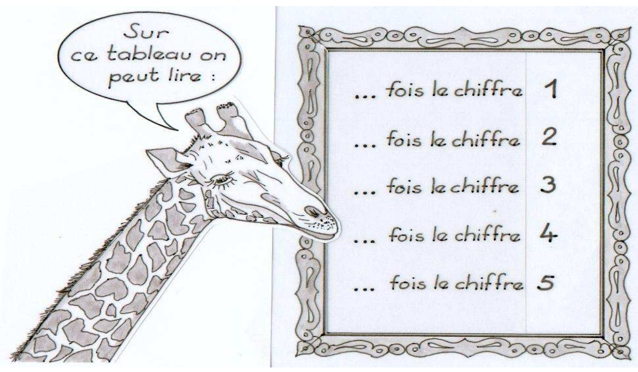
Ci-dessus le remplissage d'un octaèdre O_2 d'arête 2 par des tétraèdres T_1 et des octaèdres O_1.
Les faces visibles des octaèdres ont été grisées.

Combien de tétraèdres T_1 et d'octaèdres O_1 faut-il pour remplir un tétraèdre T_4 d'arête 4 ? Et pour remplir un octaèdre O_4 d'arête 4 ? Expliquer les réponses.

Exercice 6 : 5 points

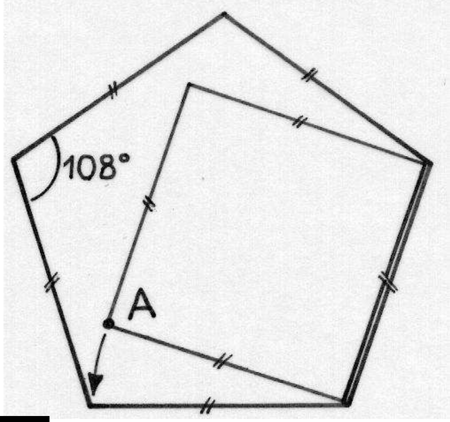
Autoréférent

Compléter par des chiffres le tableau ci-contre pour que le texte soit exact.



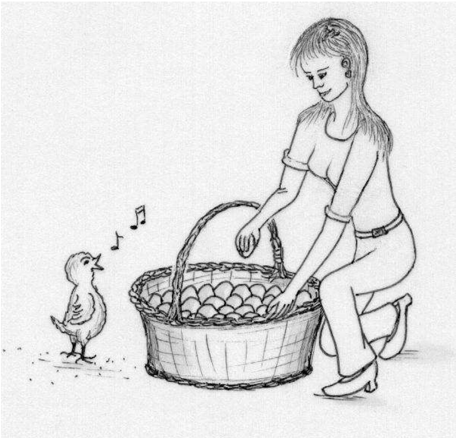
Exercice 7 : 7 points

Balade du carré



Un carré de côté 8 cm roule indéfiniment dans un pentagone régulier de côté 8 cm de telle sorte qu'au moins un de ses sommets reste en contact avec un des sommets du pentagone.

Tracer sur la feuille-réponse en rouge la courbe décrite par le sommet A du carré.



Exercice 8 : 5 points

Omelette incongrue

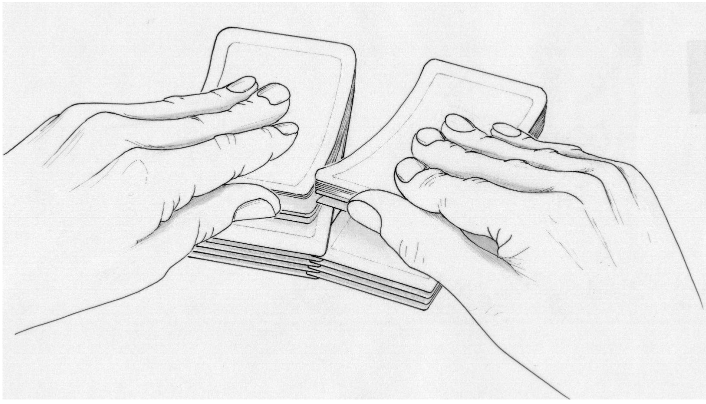
Maria veut préparer un panier avec le nombre minimum d'œufs tel que :

- si on prend les oeufs 2 par 2, il en reste un
- si on prend les oeufs 3 par 3, il en reste 2
- si on prend les oeufs 4 par 4, il en reste 3
- si on prend les oeufs 5 par 5, il en reste 4
- si on prend les oeufs 6 par 6, il en reste 5
- si on prend les oeufs 7 par 7, il n'en reste aucun.

Combien d'œufs doit-elle mettre dans son panier ? Vérifier la solution.

Exercice 9 : 7 points

Saloonpoker



Little Joe et Old Firehand rencontrent dans un saloon le célèbre Black Jacky pour faire une partie de cartes. Ils utilisent un jeu de 32 cartes numérotées de 1 à 32.
Avant même d'expliquer à ses amis la règle du jeu, Black Jacky mélange les cartes.

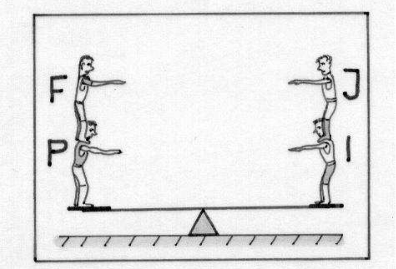
Pour cela, il place le paquet sur la table, prend exactement les 16 cartes du dessus et les pose sans les retourner à droite du paquet. Il mélange alors les deux tas en alternant une carte d'un tas et une carte de l'autre, en commençant par poser sur la table la carte du bas du tas de gauche. Il rassemble alors le tas de 32 cartes ainsi mélangées, puis il recommence plusieurs fois cette manipulation.
Little Joe est persuadé que ce n'est pas une bonne manière de battre les cartes.

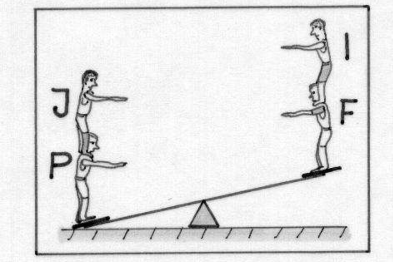
Montrer qu'après plusieurs mélanges, on obtient un résultat surprenant.

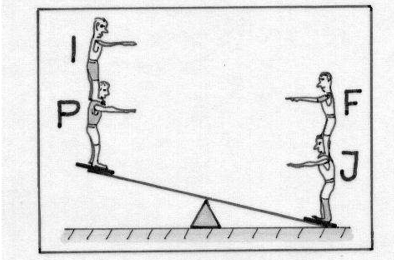
Exercice 10 : 10 points

Ça balance !

Voici trois dessins de Paul, Jean, Igor et Franck sur une balançoire.







Qui est le plus lourd ? Qui est le plus léger ?
Est-il possible de ranger les quatre frères par ordre de poids ?
Justifier les réponses.

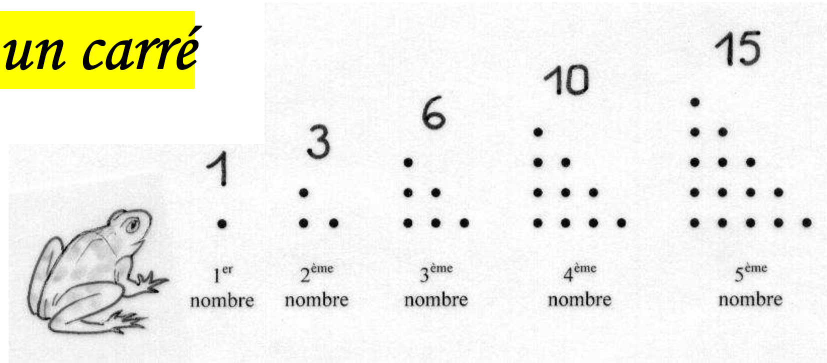
Spécial Seconde

Exercice 11 : 5 points

Deux triangles pour un carré

La figure suivante présente les cinq premiers nombres triangulaires.

Vérifier graphiquement ou par le calcul, sur trois exemples, que la somme de deux nombres triangulaires consécutifs est un carré parfait.
Admettre cette propriété et calculer le 2005ème nombre triangulaire.



Exercice 12 : 7 points

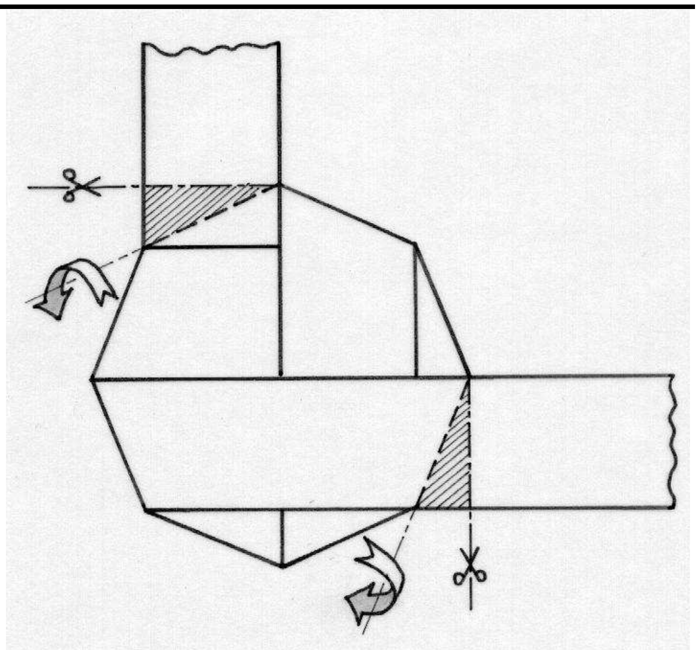
À bicyclette

Deux cyclistes, Paulette et Yves se rencontrent lors d'une randonnée. A cet instant, leurs compteurs indiquent une vitesse moyenne de 24 km/h pour Paulette et 30 km/h pour Yves. Ils roulent alors ensemble pendant une heure et parcourent ainsi 27 km avant de se quitter.
A l'instant de leur séparation, le compteur de Paulette indique une vitesse moyenne de 25 km/h tandis que celui d'Yves affiche 29 km/h.

Quelle est alors la distance totale parcourue par Paulette ?
Quelle est la distance totale parcourue par Yves ?

Exercice 13 : 10 points

Octonoeud



Sur un octogone régulier inscrit dans un cercle de 4 cm de rayon, Yolande enroule un ruban en suivant le plan ci-contre.
Le ruban, en s'enroulant, épouse parfaitement les deux faces de l'octogone.

Calculer la largeur du ruban ainsi que sa longueur minimale pour que celui-ci recouvre complètement l'octogone sur ses 2 faces. Coller l'octogone enrubanné sur la feuille-réponse.