

# Mathématiques sans frontières



Académie d'Aix-Marseille

et l'association  
Mathématiques  
sans Frontières



organisée avec le concours de l'Inspection Pédagogique Régionale et l'IREM de Strasbourg

EPREUVE DU  
5 MARS 2002

- On demande des explications ou des justifications pour les exercices 1, 7, 9, 10, 11, 12 et 13.
- Toute solution même partielle sera examinée.
- Le soin sera pris en compte.
- Ne prendre qu'une feuille-réponse par exercice.

Exercice n° 1

7 points

Abibis

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots.

In einem Hotel wurde zwischen 22 Uhr und 22.15 Uhr ein Verbrechen begangen. Die Tat dauerte 7 Minuten.

Es gibt vier Verdächtige : Andrea, Bruce, Camilla und Dimitri. Sie bewohnen vier verschiedene Zimmer. Hier ihre Angaben bei der Polizei, was sie zwischen 22 Uhr und 22.15 Uhr gemacht haben :

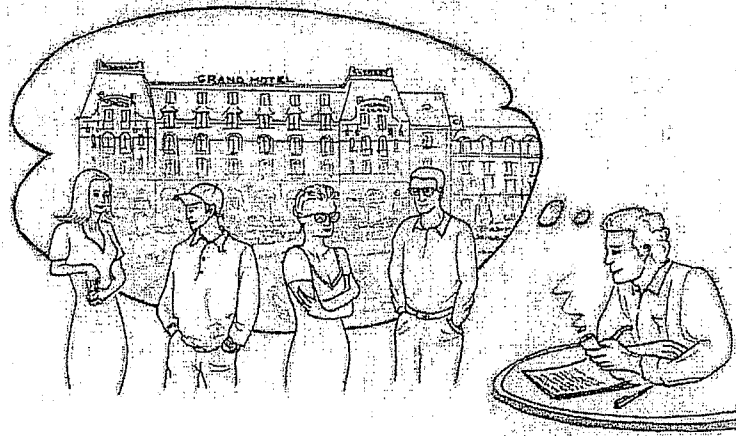
Andrea : „Zuerst hatte ich 3 Minuten lang Besuch von Bruce, danach war Dimitri 4 Minuten bei mir. Dann hatte ich noch einen Telefonanruf von Camilla.“

Bruce : „Ich war bei Andrea, bei Dimitri und habe noch mit einem Mausclick eine E-Mail verschickt.“

Camilla : „Ich habe bis 22.05 Uhr die Fernsehnachrichten angesehen und danach 5 Minuten lang mit Andrea telefoniert.“

Dimitri : „Ich war bei Andrea. Danach war Bruce für 3 Minuten bei mir.“

**Nachdem der Kommissar festgestellt hat, dass alle Angaben richtig sind, kennt er den Schuldigen. Wie hat er es herausgefunden ?**



**¿ Después de verificar que todas las declaraciones eran exactas, el inspector encuentra al culpable. Como hizo ?**

A crime was committed in a hotel between 10.00 p.m. and 10.15 p.m. and the attack lasted 7 minutes.

There are 4 suspects : Andrea, Bruce, Camilla, Dimitri. They are all staying in 4 different rooms and here are their statements to the police about their time table between 10.00 p.m. and 10.15 p.m. :

Andrea : « First Bruce paid me a visit for 3 minutes, then came Dimitri who stayed for 4 minutes ; finally Camilla called me on the phone. »

Bruce : « I went to see Andrea, then Dimitri, and with the click of the mouse, I sent an e-mail. »

Camilla : « I watched the news on TV until 10.05 p.m.. Then I called Andrea for 5 minutes. »

Dimitri : « I went to see Andrea, then Bruce came to see me for 3 minutes. »

**After checking on all these statements, the police inspector found the culprit. How did he manage ?**

En un hotel, se cometió un crimen entre las 10 y las 10 y 15 minutos de la noche y la agresión duró 7 minutos.

Hay 4 sospechosos Andrea, Bruce, Camilla, Dimitri, que ocupan 4 habitaciones diferentes y que, a propósito de su horario entre las 10 y las 10 y 15 , declararon lo siguiente a la policía :

Andrea : " Primero me visitó Bruce durante 3 minutos, más tarde recibí la visita de Dimitri, que duró 4 minutos y, finalmente, me telefoneó Camilla."

Bruce : " Visité a Andrea, luego a Dimitri y después pinchando mandé un email."

Camilla : " Vi el Telediario hasta las 10 y 5 minutos, a continuación telefoneé a Andrea durante 5 minutos."

Dimitri : " Visité a Andrea, y luego me visitó Bruce durante 3 minutos."

**In un albergo è accaduto un crimine tra le 22 e le 22 e quindici e l'aggressione è durata 7 minuti.**

Vi sono 4 sospettati : Andrea, Bruce, Camilla e Dimitri che occupano 4 camere diverse e che rilasciano alla polizia le seguenti dichiarazioni relative alle loro azioni tra le 22 e le 22 e quindici.

Andrea : " Dapprima ho ricevuto la visita di Roberto durata 3 minuti, più tardi quella di Dimitri durata 4 minuti; infine, ho ricevuto una telefonata da Camilla."

Bruce : " Io sono andato a trovare Andrea, poi Dimitri e, quindi, con un clic di mouse ho spedito una e-mail."

Camilla : " Io ho guardato il telegiornale fino alle ore 22 e 5. In seguito ho telefonato ad Andrea per 5 minuti."

Dimitri : " Io sono andato a trovare Andrea, poi ho ricevuto la visita di Roberto durata 3 minuti."

**Dopo aver verificato la correttezza di tutte queste dichiarazioni, l'ispettore scopre il colpevole. Come ha fatto ?**

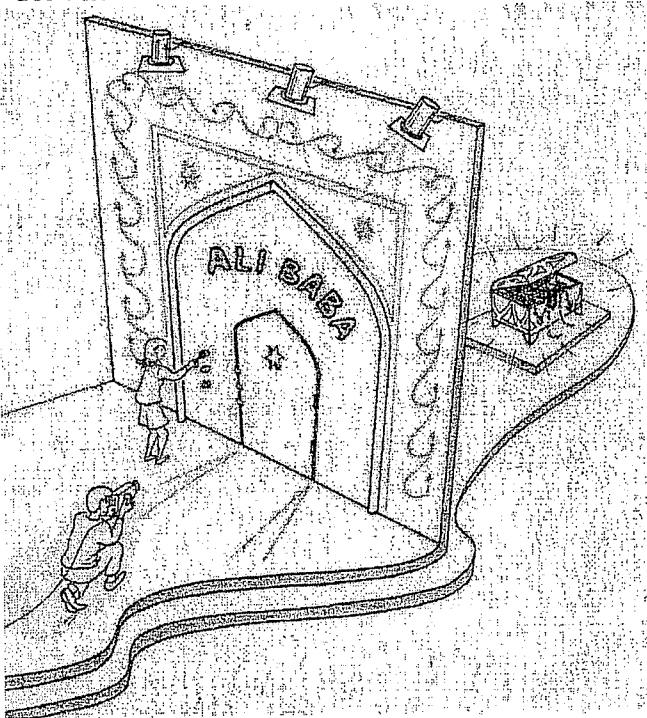
### Exercice n° 2

5 points

## Le grand dil

Au cours du jeu télévisé "La Caverne d'Ali Baba", Sophie veut entrer dans la salle du trésor. La porte de celle-ci est munie de trois verrous commandés chacun par un commutateur qui l'ouvre et le ferme alternativement. La porte est fermée. Sophie ne sait pas si un seul, deux ou trois verrous sont fermés. Par 7 fois, elle aura le droit de choisir et d'actionner un commutateur. Dès l'instant où les trois verrous seront ouverts, la porte s'ouvrira.

Donner une suite de 7 actions au cours de laquelle la porte s'ouvrira à coup sûr, quel que soit l'état initial des verrous.

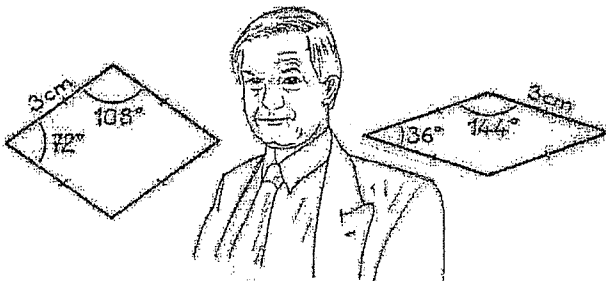


### Exercice n° 3

7 points

## Décagomanie

Le mathématicien anglais Sir Roger Penrose né en 1931 a inventé dans les années 1970 un pavage non répétitif du plan qui n'utilise que deux sortes de dalles en forme de losanges. La figure ci-dessous donne les dimensions des deux losanges.



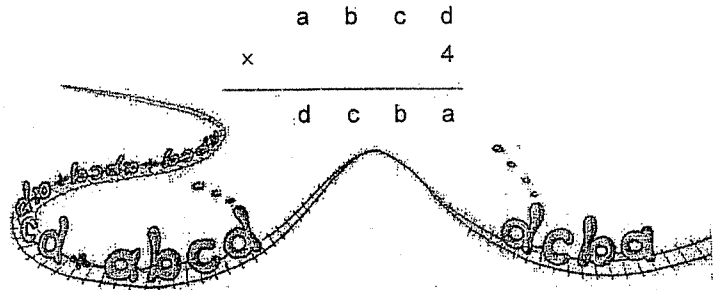
Chercher 2 façons différentes de construire un décagone régulier en assemblant 5 losanges de chaque type. Présenter sur la feuille-réponse ces 2 décagones imbriqués en utilisant moins de 20 losanges au total.

### Exercice n° 4

5 points

## À verlan

Trouver un entier de 4 chiffres supérieur à 1 000 tel qu'en le multipliant par 4 on retrouve ce nombre "renversé".



### Exercice n° 5

7 points

## L'aviatrice

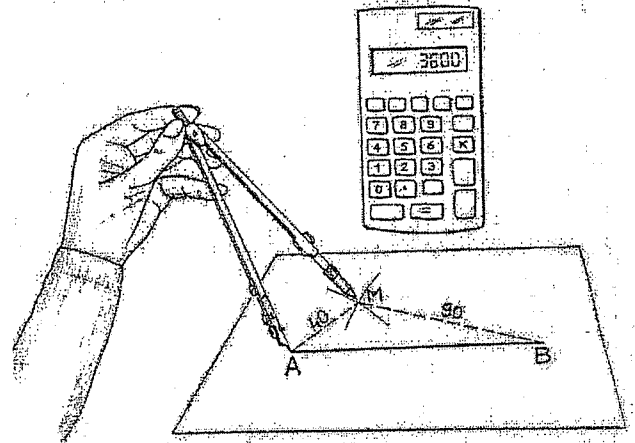
A et B sont deux points du plan, distants de 120 mm. On cherche des points  $M_1, M_2, M_3, \dots$  tels que :

$$MA \times MB = 3600$$

les distances étant exprimées en millimètres.

Placer A et B sur la feuille-réponse, puis marquer en rouge de nombreux points M tels que  $MA \times MB = 3600$ . On verra apparaître une courbe que l'on essaiera de compléter.

Présenter au verso de la feuille les paires de nombres utilisées pour obtenir les points M placés.



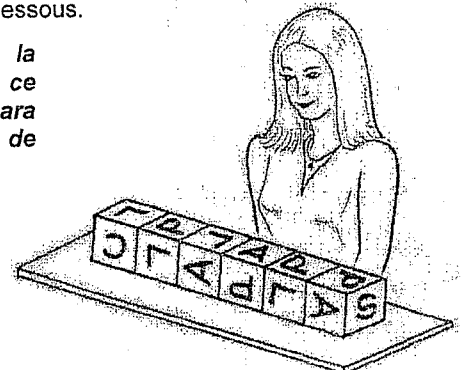
### Exercice n° 6

5 points

## Faces cachées

Etienne a posé sur la table 6 cubes tous identiques représentés ci-dessous.

Dessiner sur la feuille-réponse ce que voit Barbara de l'autre côté de la table.

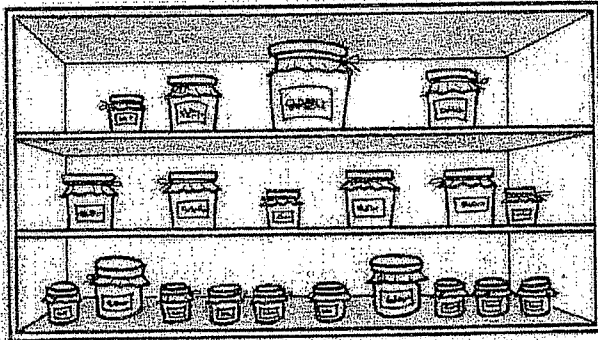


**Exercice n° 7****7 points***Pleins pots*

Pierre prépare avec sa mère la gelée de groseille. Ils remplissent 20 pots de 3 tailles différentes. Les 20 pots remplis pèsent 8,4 kg en tout.

Pierre les range sur trois étagères, comme l'indique le dessin ci-dessous, de façon à ce que chaque étagère supporte le même poids.

Quelle est la masse de chaque sorte de pot rempli ? Justifier.

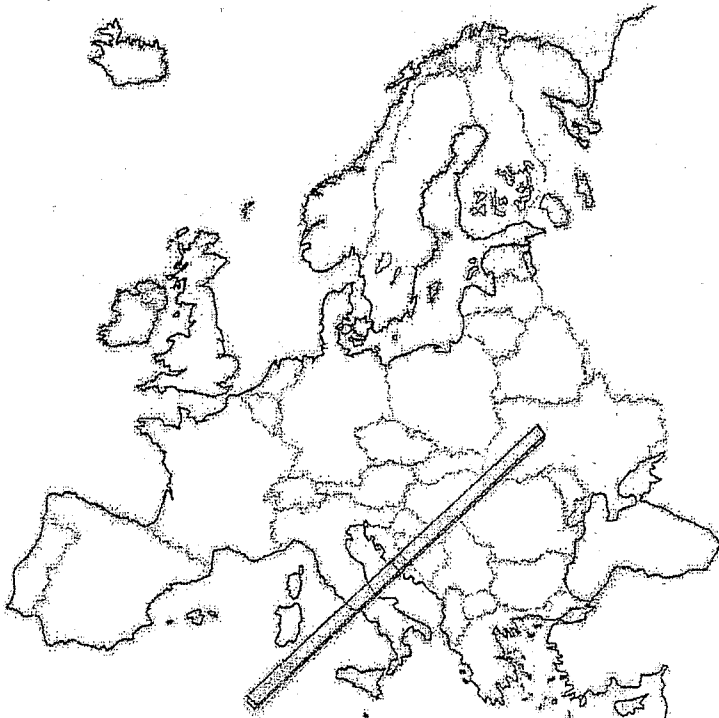
**Exercice n° 8****5 points***L'Europe en lignes*

Berlin (D), Cardiff (GB), Göteborg (S), Lausanne (CH), Madrid (E), Naples (I), Paris (F), Plzen (CZ), Utrecht (NL) et Varsovie (PL) sont 10 villes d'Europe plus ou moins connues.

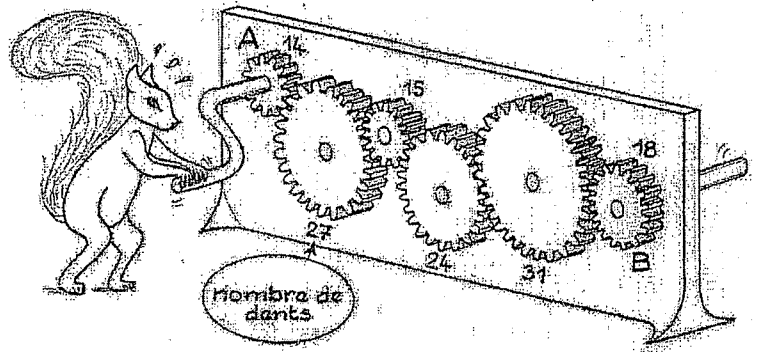
Leur particularité est que, sur ma carte, elles sont à peu près alignées 4 à 4 sur 5 droites.

Placer sur la feuille-réponse 10 points de façon qu'ils soient alignés 4 à 4 sur 5 droites.

Faire ensuite une deuxième figure présentant 15 points alignés 5 à 5 sur 6 droites.

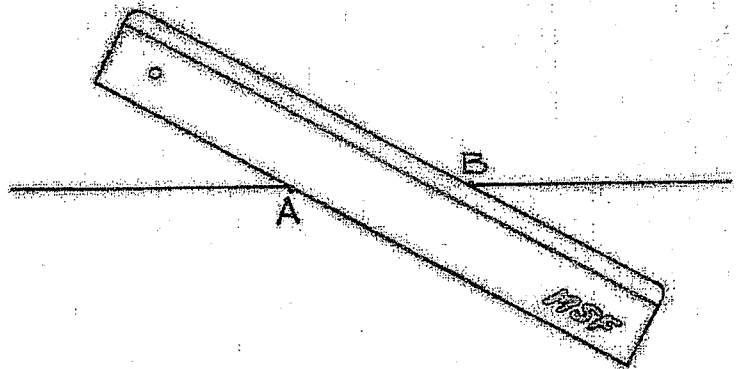
**Exercice n° 9****7 points***D'entiers*

Dans le dispositif présenté sur la figure ci-dessous, quel est le nombre minimum de tours que doit faire la roue A pour que les roues A et B effectuent chacune un nombre entier non nul de tours ? Combien de tours effectue alors la roue B ? Justifier.

**Exercice n° 10****10 points***Tout est en règle*

Bruno veut partager un segment de droite [AB] en 3 parties égales. Il ne dispose que de son crayon et d'une règle non graduée à bords parallèles.

Bruno pose d'abord la règle comme indiqué sur la figure, puis il trace deux droites parallèles l'une passant par A et l'autre par B. Il recommence en changeant la direction de sa règle de manière à obtenir un losange dont [AB] est une diagonale.



À l'aide de sa règle, il construit alors soigneusement un réseau de losanges identiques sur sa feuille. En reliant des points convenablement choisis dans ce réseau, Bruno peut alors partager le segment [AB] en trois parties égales.

Tracer sur la feuille-réponse un segment [AB] de 8 cm, puis le partager en 3 parties égales suivant la méthode de Bruno.

Démontrer que les 3 segments ainsi obtenus ont bien des longueurs égales.

# Spécial Seconde

**Exercice n° 11**

**5 points**

*C'est Chu*

Lors d'un voyage en Chine, Marco a trouvé dans le manuscrit Chu Chang Suan Shu un puzzle représentant un cercle inscrit dans un triangle.

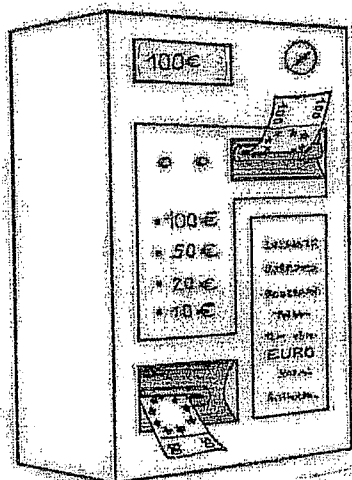
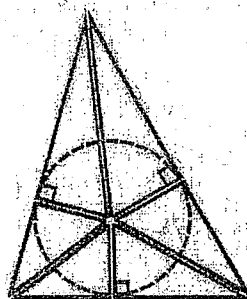
Dans ce triangle sont tracés les segments joignant les sommets au centre du cercle ainsi que les rayons du cercle aux points de contact avec les côtés du triangle.

En découpant ce triangle selon les segments tracés, on obtient 6 pièces triangulaires.

Ce puzzle permet de démontrer la formule  $R = \frac{2S}{P}$  où S désigne l'aire du triangle, P son périmètre et R le rayon du cercle inscrit.

Tracer sur la feuille-réponse un triangle de côtés 10, 12 et 14 cm avec son cercle inscrit et ses 3 rayons caractéristiques.

Refaire cette construction sur une autre feuille pour découper les 6 pièces du puzzle. Agencer ces 6 pièces en une bande rectangulaire de largeur R que l'on collera sur la feuille-réponse, puis expliquer comment on obtient alors la formule énoncée ci-dessus.



**Exercice n° 12**

**7 points**

*Eurobate*

Un changeur automatique de monnaie accepte des billets de 100 €, 50 €, 20 € et 10 € et donne la monnaie de la façon suivante :

- le billet de 100 € est changé en 1 billet de 50 €, 1 de 20 €, 2 de 10 € et 2 de 5 €
- le billet de 50 € est changé en 1 billet de 20 €, 2 de 10 € et 2 de 5 €
- le billet de 20 € est changé en 1 billet de 10 € et 2 de 5 €
- le billet de 10 € est changé en 2 billets de 5 €

Au départ on le remplit avec des billets de 50 €, 20 €, 10 € et 5 € de façon qu'il puisse effectuer exactement 100 opérations quel que soit le change exigé.

Après 100 opérations, on constate que l'appareil contient 20 billets de 100 €, 130 de 50 €, 40 de 20 € et 70 de 10 €.

Combien de billets de chaque sorte ont été introduits dans l'appareil au cours de ces 100 opérations ? Justifier.

**Exercice n° 13**

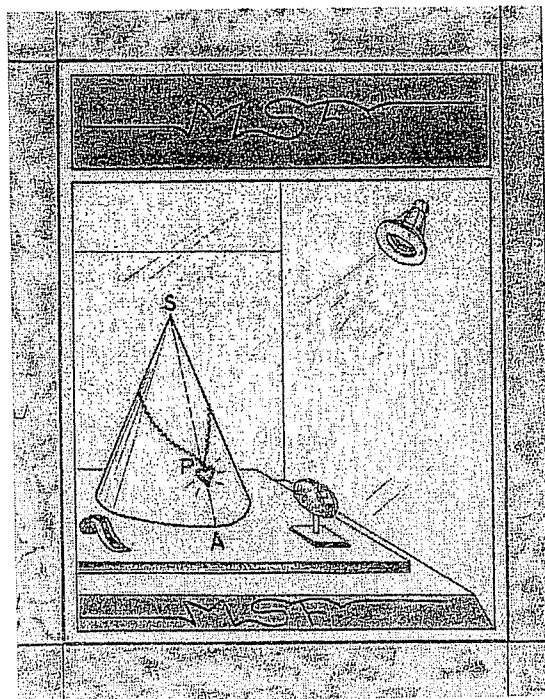
**10 points**

*C'est pas du toc*

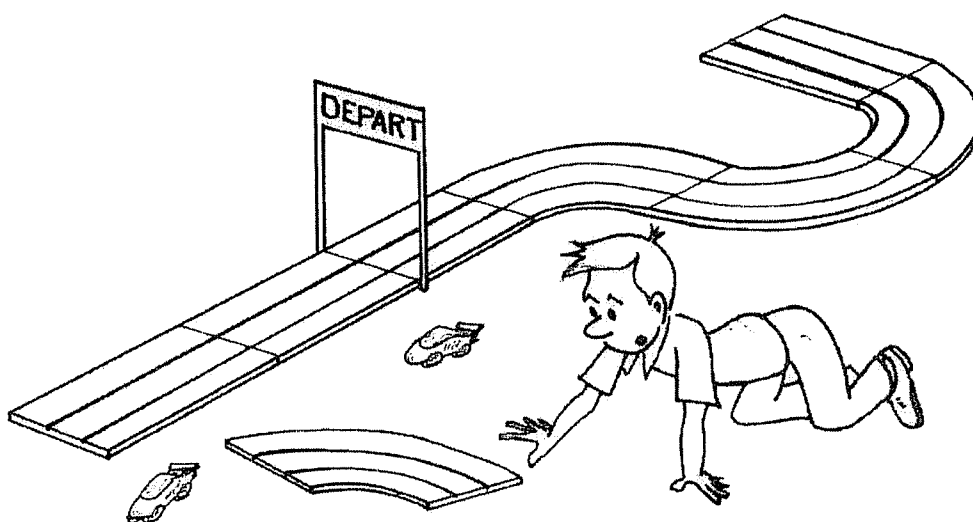
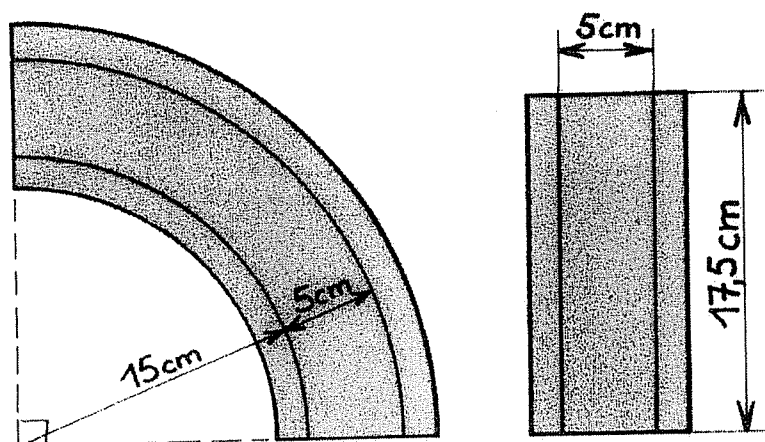
Leonardo admire dans la vitrine d'une bijouterie un pendentif posé sur un présentoir conique. Le bijou est constitué d'une lourde pierre précieuse suspendue en un point P à une fine chaînette d'or. La chaînette suit sur le cône une courbe qui est le plus court chemin allant de P à P en faisant le tour du cône.

Le diamètre de la base du cône est égal à 21 cm, la distance SA égale à 35 cm et la distance SP égale à 30 cm. On voudrait connaître la longueur de la chaînette.

Construire sur la feuille-réponse à l'échelle 1:5 le patron de la surface latérale du cône après découpage suivant la droite (SP). Sur ce patron, tracer la ligne de contact de la chaînette avec le cône puis calculer la longueur de la chaînette.



## Shéma de l'exercice n°10 Court-circuit



Du fait de la taille du schéma dans les épreuves d'entraînement, nous vous en avons fait un agrandissement afin que vous puissiez éventuellement aider vos élèves.