

Mathématiques et circulation océanique

Charlotte Perrin (CNRS, Institut de Mathématiques de Marseille)

Conférence Lycée Thiers

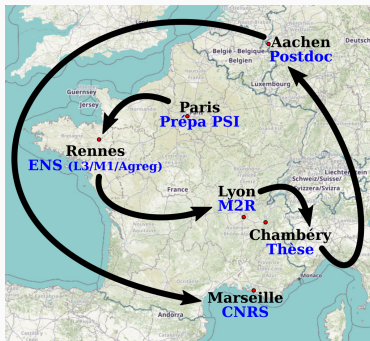
10 janvier 2023



*INSTITUT de MATHÉMATIQUES
de MARSEILLE*



Parcours scientifique



- BAC S
- 2 ans de Classes Préparatoires (MPSI, PSI)
- 4 ans à l'École Normale Supérieure de Rennes
L3, M1, M2 enseignement / AGREG, M2 recherche à Lyon
- 3 années pour préparer ma thèse
- un an de postdoc

je suis chargée de recherche au CNRS

- mon activité principale est la recherche en mathématique appliquée souvent en collaboration (en France et en Europe)
- activités d'animation de la recherche (conférence, séminaires, groupes de travail)
- activités d'enseignement (entre 30 et 45h par an ces dernières années) et diffusion

Mon domaine de recherche

je travaille dans le domaine des **mathématiques appliquées**
à la **géophysique et au mouvement collectif**



Mon domaine de recherche

je travaille dans le domaine des **mathématiques appliquées**
à la **géophysique et au mouvement collectif**

→ modélisation et analyse des Équations aux Dérivées Partielles (EDP)



principalement autour des équations de Navier-Stokes et d'Euler

Océan - Introduction générale

Climat - Rôle principal de l'atmosphère et de l'océan

- étude du système climatique → bilan radiatif

rayonnement solaire reçu vs émission rayonnement infra-rouge vers l'espace

⚠ bilan nul globalement mais négatif au pôle, positif à l'équateur !

- les enveloppes fluides redistribuent l'excès d'énergie de l'équateur aux pôles

atmosphère ↔ dynamique rapide

temps caractéristique = 1 an

océan ↔ dynamique lente

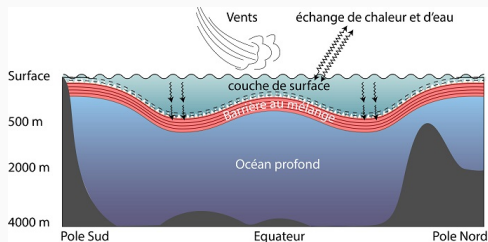
temps caractéristique = 1000 ans

- océan = pompe à chaleur et à carbone → stocke 90% de l'excès d'énergie associé au changement climatique

nécessité de comprendre la dynamique et les couplages océan-atmosphère sur une large gamme d'échelles temporelles et spatiales

Océan - Structure générale

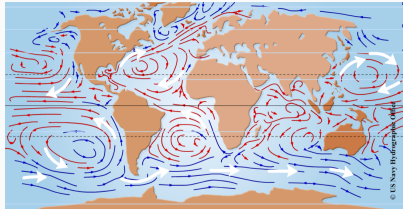
- deux variables importantes: la **température** T et la **salinité** S
 - quand T croît → la densité ρ diminue;
 - quand S croît → la densité ρ augmente;



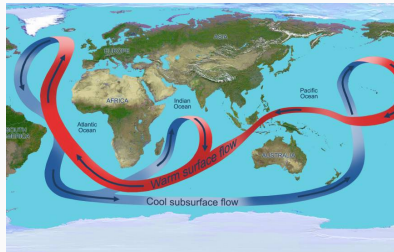
- couche de surface homogénéisée
 T, S proches des valeurs en surface
- thermocline (resp. pynocline)
 T chute (resp. ρ croît) fortement
- eaux profondes froides

Deux modes principaux de circulation

- **circulation quasi-horizontale** pilotée principalement par le vent + rotation Terre
→ formation de gyres, courant circumpolaire antarctique



- **circulation verticale** forcée, en partie, par les gradients de densité
→ **circulation thermohaline** (*Meridional Overturning Circulation - MOC*)



Équations de Navier-Stokes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 & \leftarrow \text{conservation de la masse} \\ \rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla)u) + \nabla p - \operatorname{div}(\mathbb{S}) = f & \leftarrow \text{éq de la qté de mouvement / PFD} \\ + \text{ éq. d'évolution sur } T \text{ et } S & \end{array} \right.$$

+ condition au fond, bords et surface libre

$\rho = \rho(T, S, p)$: densité

u : vitesse

p : pression

$\mathbb{S} = \mathbb{S}(\nabla u, T)$: dissipation visqueuse (si $\mathbb{S} = 0$ alors équations d'Euler)

f : force extérieure, force de Coriolis, etc.

T, S : température et salinité

en général on fait l'hypothèse du régime incompressible :

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Équations de Navier-Stokes incompressible (homogène $\rho \equiv 1$)

$$\begin{cases} \operatorname{div}(u) = 0 \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p - \mu \Delta u = 0 \end{cases}$$

⚠ l'analyse de ces équations est très difficile du point de vue math. !
existence globale de solutions régulières en 3D → Millenium Prize Problem (1M€)



avancées récentes expliquées sur
<https://www.quantamagazine.org/>

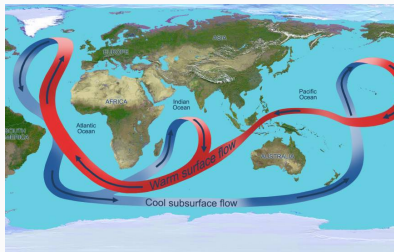
⚠ la simulation numérique des écoulements 3D est très coûteuse !

⇒ on étudiera/simulera des modèles "réduits"

Circulation thermohaline

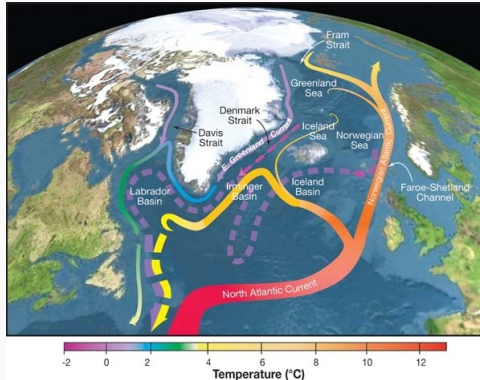
Meridional Overtuning Circulation (MOC) - Généralités

- circulation océanique dépendant des gradients de T et S avec principalement :
 - une plongée des eaux froides aux hautes latitudes
 - une remontée des eaux chaudes plus au sud
 - transport méridional profond sous la thermocline



- composante lente du système climatique → 1000km en 10 ans

Atlantic Meridional Overtuning Circulation (AMOC)



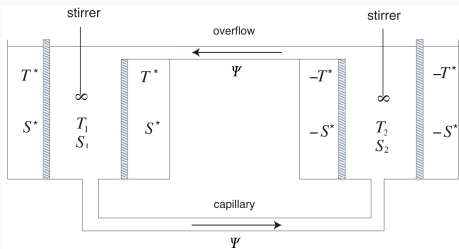
- fluctuations naturelles à l'échelle d'un mois, d'un an
- le GIEC anticipe un ralentissement significatif au cours du siècle

Variation de l'AMOC - Climat et périodes glaciaires

- la dernière période glaciaire ($\approx -120\ 000$ ans à $-10\ 000$ ans) a été interrompue par des périodes relativement courtes de climat plus tempéré
- ces fluctuations rapides du climat correspondraient à des états \neq de l'AMOC
 - faible pendant les périodes les plus froides
 - forte (\approx son état actuel) pendant les périodes tempérées intermédiaires

Les intervalles glaciaires auraient été caractérisées par la présence d'eau douce aux hautes latitudes de l'Atlantique Nord, ayant un effet stabilisateur sur la stratification, ce qui aurait empêché la formation d'eau profonde et induit une faible circulation en profondeur, donc une faible MOC

AMOC - Modèle à deux boîtes (Stommel - 1961)



- **box 1** : océan à l'équateur
réservoir (atmosphère) → T^*, S^*
- **box 2** : océan aux hautes latitudes
réservoir (atmosphère) → $-T^*, -S^*$
- transport eaux profondes dépendant de $\rho_1 - \rho_2$
- conservation de la masse \implies transport d'eaux en surface

- circulation Ψ proportionnelle au carré du gradient de densité (non trivial à justifier) :

$$\Psi = A(\rho_1 - \rho_2)^2 \quad \text{avec la loi d'état} \quad \rho = \rho_0(1 - \beta_T T + \beta_S S)$$

- dynamique température

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{1}{t_r}(T^* - T_1) - \Psi(T_1 - T_2)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \underbrace{\frac{1}{t_r}(-T^* - T_2)}_{\text{relaxation thermique}} - \underbrace{\Psi(T_2 - T_1)}_{\text{transfert } 2 \rightarrow 1}$$

- dynamique salinité

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{1}{t_s}(S^* - S_1) - \Psi(S_1 - S_2)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = \underbrace{\frac{1}{t_s}(-S^* - S_2)}_{\text{relaxation saline}} - \underbrace{\Psi(S_2 - S_1)}_{\text{transfert } 2 \rightarrow 1}$$

dans la suite on s'intéresse à $\hat{T} = \frac{T_1 - T_2}{2T^*}$, $\hat{S} = \frac{S_1 - S_2}{2S^*}$

AMOC - Modèle à deux boîtes - Réduction

dans la suite on s'intéresse à $\hat{T} = \frac{T_1 - T_2}{2T^*}$, $\hat{S} = \frac{S_1 - S_2}{2S^*}$

$$\begin{cases} \frac{d\hat{T}}{dt}(t) = \frac{1}{t_r}(1 - \hat{T}(t)) - 2\Psi(t)\hat{T}(t) \\ \frac{d\hat{S}}{dt}(t) = \frac{1}{t_s}(1 - \hat{S}(t)) - 2\Psi(t)\hat{S}(t) \end{cases}$$

- en pratique $t_r \ll t_s$
- modèle adimensionné: on pose $\tau = \frac{t}{t_s}$, $\varepsilon = \frac{t_r}{t_s}$

$$\begin{cases} \hat{T}'(\tau) = \frac{1 - \hat{T}(\tau)}{\varepsilon} - \phi(\tau)\hat{T}(\tau) \\ \hat{S}'(\tau) = (1 - \hat{S}(\tau)) - \phi(\tau)\hat{S}(\tau) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \phi = 2At_s(\rho_1 - \rho_2)^2 = \gamma^2(\hat{T} - \mu\hat{S})^2$$

$$\text{et} \quad \gamma = \sqrt{8At_s\rho_0}\beta_T T^*, \quad \mu = \frac{\beta_S S^*}{\beta_T T^*}$$

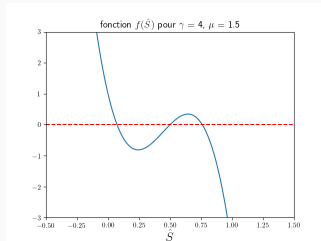
- réduction de dimension : $\varepsilon \ll 1 \implies \hat{T} \approx 1$

$$\hat{S}'(\tau) = (1 - \hat{S}(\tau)) - \gamma^2(1 - \mu\hat{S}(\tau))^2\hat{S}(\tau)$$

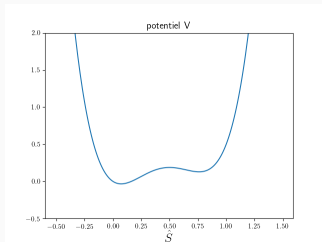
AMOC - Étude du modèle réduit

$$\hat{S}' = (1 - \hat{S}) - \gamma^2 (1 - \mu \hat{S})^2 \hat{S}$$

→ équation diff. non-linéaire de la forme
 $\hat{S}' = f(\hat{S})$ avec $f(\hat{S}) = (1 - \hat{S}) - \gamma^2 (1 - \mu \hat{S})^2 \hat{S}$



- théorème de Cauchy-Lipschitz : étant donnée une condition initiale $\hat{S}(\tau_0) = \hat{S}_0$, existence et unicité de la solution en temps court
- existence globale en temps en ré-écrivant l'équation sous la forme $\frac{d}{d\tau} \hat{S} = -\frac{dV}{dS}(\hat{S})$



et en observant que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (V(\hat{S}(\tau))) &= \frac{dV}{dS}(\hat{S}(\tau)) \frac{d}{d\tau} \hat{S}(\tau) \\ &= -\left(\frac{dV}{dS}(\hat{S}(\tau)) \right)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

quel comportement en temps long ?

Équations différentielles - Points d'équilibre et stabilité

soit l'équation différentielle non-linéaire (autonome):

$$y'(t) = f(y(t))$$

- on dit que $y^* \in \mathbb{R}$ est un point d'équilibre si $f(y^*) = 0$
→ pour un tel y^* , si $y(t_0) = y^*$ alors $y(t) = y^*$ pour tout temps
- quelle dynamique si on part proche d'un point équilibre ? on note $z(t) := y(t) - y^*$

$$z'(t) = y'(t)$$

$$= f(y(t))$$

$$= f(y(t)) - f(y^*) = f'(y^*)(y(t) - y^*) + R$$

en négligeant le terme de reste R au voisinage du point d'équilibre (Taylor)

$$z'(t) = f'(y^*)z(t).$$

Théorème (Théorème de linéarisation)

On suppose que y^ est une point d'équilibre de l'équation $y' = f(y)$ où f est une fonction régulière. Alors y^* est localement*

- *attractif / asymptotiquement stable si $f'(y^*) < 0$;*
- *répulsif / instable si $f'(y^*) > 0$.*

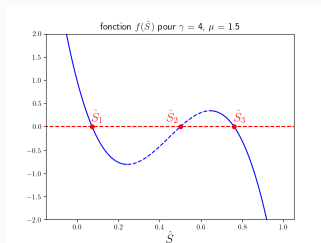
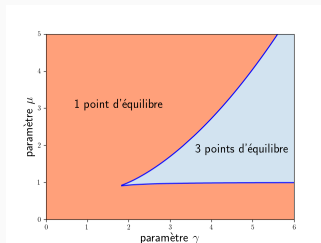
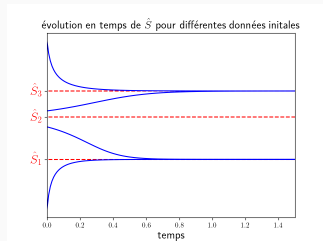
AMOC - Points d'équilibre et stabilité

$$\hat{S}' = (1 - \hat{S}) - \gamma^2(1 - \mu\hat{S})^2\hat{S} =: f(\hat{S})$$

en fonction de γ et μ on peut avoir un ou plusieurs points d'équilibre

pour $\gamma^2 > 3$ et $\mu \in]\mu_-, \mu_+[$, on a 3 points d'équilibre $\hat{S}_1 < \hat{S}_2 < \hat{S}_3$

\hat{S}_1, \hat{S}_3 sont stables, \hat{S}_2 est instable

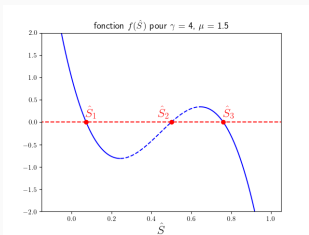


$$\rho_1 - \rho_2 = -K(\hat{T} - \mu\hat{S}) \quad \text{avec } K, \mu > 0, \hat{T} \approx 1$$

- on a $\hat{S}_1, \hat{S}_2 < \frac{1}{\mu} \implies \rho_1 < \rho_2$
 - circulation thermique (régie par effet thermique)
 - **circulation abyssale pôle Nord vers équateur**
- on a $\hat{S}_3 > \frac{1}{\mu} \implies \rho_1 > \rho_2$
 - circulation saline (régie par effet de salinité)
 - circulation abyssale équateur vers pôle Nord

- la circulation est d'autant plus grande que $|\rho_1 - \rho_2|$ est grand
 - $\hat{S}_1 \rightarrow$ régime stable avec "forte circulation"
 - $\hat{S}_3 \rightarrow$ régime stable avec "faible circulation"

régime actuel: forte circulation régie par effet thermique



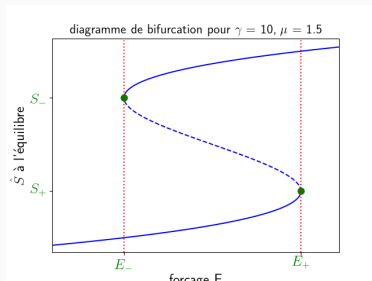
AMOC - Forçage salin

en pratique la salinité est forcée par un flux $\pm E$ (pluies/évaporation/fonte de glace)
et la dynamique saline s'écrit

$$\hat{S}' = \hat{E} - \gamma^2(1 - \mu\hat{S})^2\hat{S}$$

on a de manière analogue 3 équilibres pour $\gamma^2 > 3$ et $\mu \in]\mu_-(\gamma, E), \mu_+(\gamma, E)[$ (ou de manière équivalente $E \in]E_-(\gamma, \mu), E_+(\gamma, \mu)[$) qui satisfont

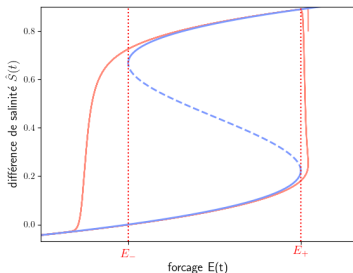
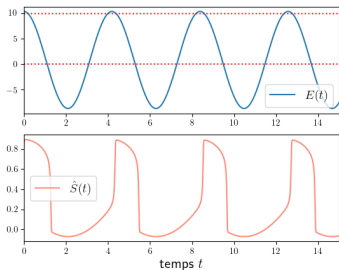
$$E = \gamma^2(1 - \mu\hat{S}_i)^2\hat{S}_i$$



deux "points de bascule" (tipping points)
pour $E = E_-$ et $E = E_+$

AMOC - Forçage et Phénomène d'hystérésis

cas d'un forçage dépendant du temps : $E(t) = E_0 + A\cos(\omega t)$



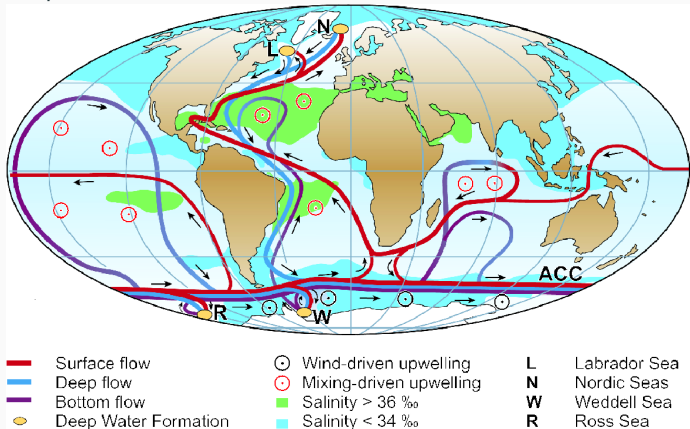
- tant que $E > E_-$, \hat{S} décroît lentement
- juste après avoir passé la valeur critique E_- , \hat{S} décroît de manière abrupte
- il faut que E passe à nouveau E_+ pour retrouver un régime similaire au régime "initial"

⇒ phénomène d'hystérésis

- homogénéité dans les boîtes;
- pas de prise en compte des autres bassins océaniques;
- pas de de prise en compte d'autres forçages...

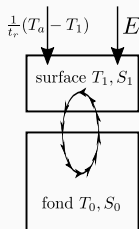
Phénomènes importants pour le maintien de la MOC

- aux basses latitudes, la **diffusion turbulente** (ou “**mixing**”) réchauffe les eaux profondes qui remontent alors lentement vers la surface;
- au niveau de l'ACC (*Antarctic Circumpolar Current*) le **forçage du vent** autour de l'Antarctique “pompe” les eaux profondes qui viennent de l'Atlantique nord



MOC - Vers des modèles plus complexes

- modèle à 3 boîtes → modélisation d'une circulation pôle à pôle
- forçage stochastique → modélisation d'événements de Dansgaard-Oeschger, qui sont des réchauffements brusques durant la dernière glaciation
- oscillations convectives/advectives entre le fond et la surface (Welander)



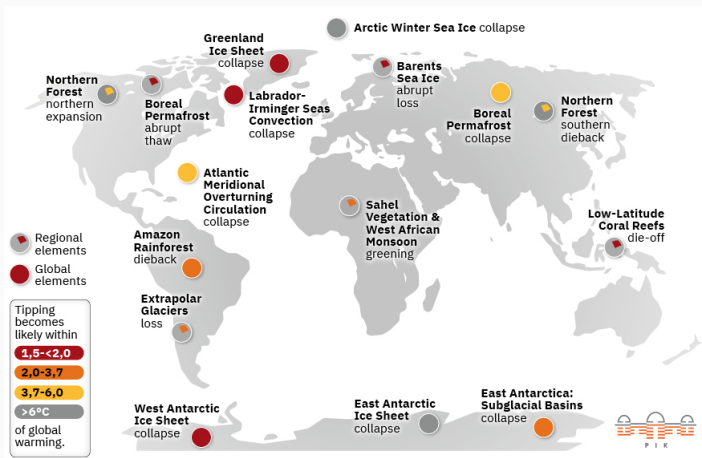
- modèles d'EDP → prise en compte de la non-homogénéité spatiale
 - importance des conditions aux limites - couches limites
 - importance de la paramétrisation des effets de diffusion et des "processus sous-mailles"

Conclusion

mise en évidence via l'analyse mathématique de phénomènes physiques non triviaux

- mise en évidence de plusieurs équilibres pour la circulation de l'AMOC
- phénomène d'hystéresis et de points de bascule (tipping points)

Tipping points et climat



Quelques sujets actuels de recherche en math.

- modélisation et analyse mathématique autour de la turbulence, prise en compte d'effets non-hydrostatiques, de compressibilité, etc.
- couplage atmosphère ; dynamique des calottes glaciaires

Quelques références

- site web **Images des Maths**
 - ★ Modèles simples du climat 1, 2, 3
- autour de l'analyse des éq. de Navier-Stokes et d'Euler
 - site de vulgarisation **quanta magazine** (www.quantamagazine.org/)
 - ★ Mathematicians Coax Fluid Equations Into Nonphysical Solutions
 - ★ Computer Proof 'Blows Up' Centuries-Old Fluid Equations
- des podcasts
 - ★ **Podcast "7e science"** Ep12 "Le réchauffement climatique est-il incontrôlable comme dans Le jour d'après" ?
 - ★ **Podcast "Dès demain"** (ENS)