6 December 2022

# La réponse est 1/42

## Une introduction aux nombres de Bernoulli

Erwan Hillion - Institut de Mathématiques de Marseille

# La formule du jeune Gauss, et bien plus

Pour tout $p \geq 0$ et $n \geq 0$, on pose :

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p.$$

- Pour $p = 0$ c'est facile, on a $S_0(n) = n + 1$.
- Le jeune Gauss (selon la légende) a remarqué que $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Formules "classiques" :

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ ,\ S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

On voudrait généraliser les formules précédentes...

**Conjecture**

Il existe un polynôme $F_p \in \mathbb{Q}_{p+1}[X]$ tel que $S_p(n-1) = F_p(n)$.

Si $F_p$ existe on peut calculer son coefficient dominant :

$$\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

Pour obtenir les coefficients suivants, il faudrait mieux comprendre l'erreur d'approximation dans les sommes de Riemann...

Johannn Faulhaber (1631) est parvenu à calculer les 17 premiers polynômes $F_n$ :

... Atque si porrò ad altiores gradatim potestates pergere, levique negotio sequentem adornare laterculum licet :

*Summae Potestatum*

$$\int n = \tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{2}n$$
$$\int nn = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{6}n$$
$$\int n^3 = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}nn$$
$$\int n^4 = \tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n$$
$$\int n^5 = \tfrac{1}{6}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}nn$$
$$\int n^6 = \tfrac{1}{7}n^7 + \tfrac{1}{2}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 - \tfrac{1}{6}n^3 + \tfrac{1}{42}n$$
$$\int n^7 = \tfrac{1}{8}n^8 + \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 - \tfrac{7}{24}n^4 + \tfrac{1}{12}nn$$
$$\int n^8 = \tfrac{1}{9}n^9 + \tfrac{1}{2}n^8 + \tfrac{2}{3}n^7 - \tfrac{7}{15}n^5 + \tfrac{2}{9}n^3 - \tfrac{1}{30}n$$
$$\int n^9 = \tfrac{1}{10}n^{10} + \tfrac{1}{2}n^9 + \tfrac{3}{4}n^8 - \tfrac{7}{10}n^6 + \tfrac{1}{2}n^4 - \tfrac{1}{12}nn$$
$$\int n^{10} = \tfrac{1}{11}n^{11} + \tfrac{1}{2}n^{10} + \tfrac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{5}{66}n$$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentuis ensperexit, eundem etiam continuare poterit absque his ratiociniorum ambabimus : Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium $n^c$ seu

$$\int n^c = \frac{1}{\;} n^{c+1} + \frac{1}{\;} n^c + \frac{c}{\;} A n^{c-1} + \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2}{\;} B n^{c-3}$$

Avec nos notations :

$$
\begin{array}{lcllllllll}
F_0(x) & = & \frac{1}{1}x & & & & & & \\
F_1(x) & = & \frac{1}{2}x^2 & -\frac{1}{2}x & & & & & \\
F_2(x) & = & \frac{1}{3}x^3 & -\frac{1}{2}x^2 & +\frac{1}{6}x & & & & \\
F_3(x) & = & \frac{1}{4}x^4 & -\frac{1}{2}x^3 & +\frac{1}{4}x^2 & +0x & & & \\
F_4(x) & = & \frac{1}{5}x^5 & -\frac{1}{2}x^4 & +\frac{1}{3}x^3 & +0x^2 & -\frac{1}{30}x & & \\
F_5(x) & = & \frac{1}{6}x^6 & -\frac{1}{2}x^5 & +\frac{5}{12}x^4 & +0x^3 & -\frac{1}{12}x^2 & +0x & \\
F_6(x) & = & \frac{1}{7}x^7 & -\frac{1}{2}x^6 & +\frac{1}{2}x^5 & +0x^4 & -\frac{1}{6}x^3 & +0x^2 & +\frac{1}{42}x.
\end{array}
$$

On voit apparaître des phénomènes intéressants (colonnes 1, 2, 4 et 6), mais il reste du mystère (colonnes 3 et 5).

La bonne intuition de Jakob Bernoulli a été de voir que :

$$\begin{array}{rcllllll}
1F_0(x) & = & \binom{1}{0}x & & & & & \\
2F_1(x) & = & \binom{2}{0}x^2 & -\frac{1}{2}\binom{2}{1}x & & & & \\
3F_2(x) & = & \binom{3}{0}x^3 & -\frac{1}{2}\binom{3}{1}x^2 & +\frac{1}{6}\binom{3}{2}x & & & \\
4F_3(x) & = & \binom{4}{0}x^4 & -\frac{1}{2}\binom{4}{1}x^3 & +\frac{1}{6}\binom{4}{2}x^2 & +0\binom{4}{3}x & & \\
5F_4(x) & = & \binom{5}{0}x^5 & -\frac{1}{2}\binom{5}{1}x^4 & +\frac{1}{6}\binom{5}{2}x^3 & +0\binom{5}{3}x^2 & -\frac{1}{30}\binom{5}{4}x & \\
6F_5(x) & = & \binom{6}{0}x^6 & -\frac{1}{2}\binom{6}{1}x^5 & +\frac{1}{6}\binom{6}{2}x^4 & +0\binom{6}{3}x^3 & -\frac{1}{30}\binom{6}{4}x^2 & +0\binom{6}{5}x
\end{array}$$

On voit apparaître une suite de nombres $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \ldots$ qui permettrait de construire les polynômes $F_n$ : ce sont les nombres de Bernoulli.

Bernoulli n'est pas allé plus loin dans son étude...


Bernoulli a introduit ses nombres en 1713. Ils ont été découverts indépendammment par Seki Takakazu à la même époque.

# Une formule générale

On fixe $n \geq 1$ et on pose $S_l = S_l(n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} k^l$.

Chasles et changement de variables $z = x - k$ :

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} = \int_0^n x^p dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} x^p dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (z+k)^p dz.$$

Formule du binôme :

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \sum_{l=0}^{p} \binom{p}{l} z^{p-l} k^l dz = \sum_{l=0}^{p} \frac{1}{p-l+1} \binom{p}{l} S_l.$$

Pour les petites valeurs de $p$, on a :

$$\begin{array}{ccccccccc}
n & = & S_0 & & & & & & \\
\frac{1}{2}n^2 & = & \frac{1}{2}S_0 & + & S_1 & & & & \\
\frac{1}{3}n^3 & = & \frac{1}{3}S_0 & + & S_1 & + & S_2 & & \\
\frac{1}{4}n^4 & = & \frac{1}{4}S_0 & + & S_1 & + & \frac{3}{2}S_2 & + & S_3 \\
 & \dots & & & & & & &
\end{array}$$

Cela permet déjà de prouver l'existence et de construire de proche en proche les polynômes $F_m$, par exemple :

$$F_1(n) = S_1(n-1) = S_1 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}S_0 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

On peut récrire les équations précédentes sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} n \\ \frac{1}{2}n^2 \\ \vdots \\ \frac{1}{m+1}n^{m+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix}$$

où $A \in M_{m+1}(\mathbb{R})$ vérifie $A(i,j) = \frac{1}{i-j+1}\binom{i}{j}$ si $0 \leq j \leq i$ et $A_{i,j} = 0$ sinon. La matrice $A$ est triangulaire inférieure.

On aura trouvé tous les $F_p$ pour $0 \leq p \leq m$ si on sait inverser la matrice $A$...

Par exemple pour $m = 4$ la matrice à inverser est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que pour $j \leq i$ on a :

$$A_{i,j} = \frac{1}{i-j+1}\frac{i!}{j!(i-j)!} = \frac{i!}{j!}\frac{1}{(i-j+1)!},$$

donc

$$A = \mathrm{Diag}(1!, \ldots, n!) \times C \times \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{1!}, \ldots, \frac{1}{n!}\right)$$

avec

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{1!} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 0 & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m!} & \frac{1}{(m-1)!} & \cdots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} \end{pmatrix}.$$

Comment inverser $C$ ? Une méthode consiste à écrire :

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} J^k,$$

avec :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque intéressante :

$$J\ C + I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{l!} J^l = \exp(J),$$

donc :

$$C^{-1} = (\exp(J) - I)^{-1} J.$$

NON !!! (ressaisis-toi) En revanche, si $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, alors

$$C^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k J^k.$$

On en déduit $A^{-1}$, puis l'expression des polynômes $F_p$.

En recollant proprement les morceaux :

### Théorème

On a :

$$S_p(n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{l=0}^{p} \binom{p+1}{l} \, B_l \; n^{p-l+1},$$

où les coefficients $B_l$ (nombres de Bernoulli) sont définis par le développement en série

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k.$$

On retrouve bien les résultats de Bernoulli pour les petites valeurs de $p$.

Pour information, le rayon de convergence de la série entière est $2\pi$ (en pratique on raisonne en termes de séries formelles).

# Les nombres de Bernoulli

Pour calculer explicitement $B_n$, le plus simple est d'utiliser la formule de récurrence :

$$B_0 = 1 \ , \ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0.$$

On obtient :

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42},$$

$$B_7 = 0, B_8 = -\frac{1}{30}, B_9 = 0, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{11} = 0, B_{12} = -\frac{691}{2730}$$

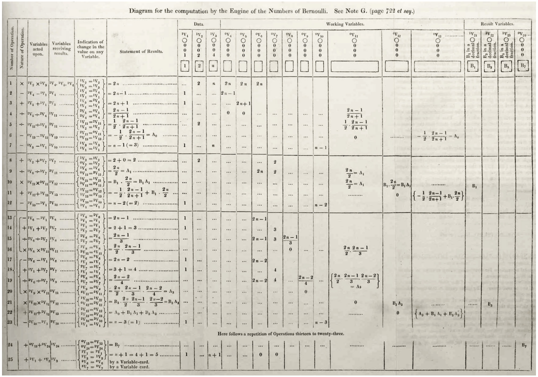

Diagram for the computation by the Engine of the Numbers of Bernoulli. See Note G. (page 722 *et seq.*)

| Number of Operation. | Nature of Operation. | Variables acted upon. | Variables receiving results. | Indication of change in the value on any Variable. | Statement of Results. | Data. | | | Working Variables. | | | | | | | | | | Result Variables. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | ${}^1V_1$ 0 0 0 1 [1] | ${}^1V_2$ 0 0 0 2 [2] | ${}^1V_3$ 0 0 0 4 [$n$] | ${}^0V_4$ 0 0 0 0 | ${}^0V_5$ 0 0 0 0 | ${}^0V_6$ 0 0 0 0 | ${}^0V_7$ 0 0 0 0 | ${}^0V_8$ 0 0 0 0 | ${}^0V_9$ 0 0 0 0 | ${}^0V_{10}$ 0 0 0 0 | ${}^0V_{11}$ 0 0 0 0 | ${}^0V_{12}$ 0 0 0 0 | ${}^0V_{13}$ ......... 0 0 0 0 | ${}^1V_{21}$ $B_1$ in a decimal fraction. [$B_1$] | ${}^1V_{22}$ $B_3$ in a decimal fraction. [$B_3$] | ${}^1V_{23}$ $B_5$ in a decimal fraction. [$B_5$] | ${}^0V_{24}$... 0 0 0 [$B_7$] |
| 1 | $\times$ | ${}^1V_2 \times {}^1V_3$ | ${}^1V_4, {}^1V_5, {}^1V_6$ | $\{{}^1V_2 = {}^1V_2,\ {}^1V_3 = {}^1V_3\}$ | $= 2n$ | ... | 2 | $n$ | $2n$ | $2n$ | $2n$ | | | | | | | | | | | |
| 2 | $-$ | ${}^1V_4 - {}^1V_1$ | ${}^2V_4$ | $\{{}^1V_4 = {}^2V_4,\ {}^1V_1 = {}^1V_1\}$ | $= 2n-1$ | 1 | ... | ... | $2n-1$ | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | $+$ | ${}^1V_5 + {}^1V_1$ | ${}^2V_5$ | $\{{}^1V_5 = {}^2V_5,\ {}^1V_1 = {}^1V_1\}$ | $= 2n+1$ | 1 | ... | ... | ... | $2n+1$ | | | | | | | | | | | | |
| 4 | $\div$ | ${}^2V_5 \div {}^2V_4$ | ${}^1V_{11}$ | $\{{}^2V_5 = {}^0V_5,\ {}^2V_4 = {}^0V_4\}$ | $= \frac{2n-1}{2n+1}$ | ... | ... | ... | 0 | 0 | ... | ... | ... | ... | ... | $\frac{2n-1}{2n+1}$ | | | | | | |
| 5 | $\div$ | ${}^1V_{11} \div {}^1V_2$ | ${}^2V_{11}$ | $\{{}^1V_{11} = {}^2V_{11},\ {}^1V_2 = {}^1V_2\}$ | $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$ | ... | 2 | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | $\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$ | | | | | | |
| 6 | $-$ | ${}^0V_{13} - {}^2V_{11}$ | ${}^1V_{13}$ | $\{{}^2V_{11} = {}^0V_{11},\ {}^0V_{13} = {}^1V_{13}\}$ | $= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = A_0$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | 0 | ......... | $-\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = A_0$ | | | | |
| 7 | $-$ | ${}^1V_3 - {}^1V_1$ | ${}^1V_{10}$ | $\{{}^1V_3 = {}^1V_3,\ {}^1V_1 = {}^1V_1\}$ | $= n - 1\ (=3)$ | 1 | ... | $n$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... | $n-1$ | | | | | | | |
| 8 | $+$ | ${}^1V_2 + {}^0V_7$ | ${}^1V_7$ | $\{{}^1V_2 = {}^1V_2,\ {}^0V_7 = {}^1V_7\}$ | $= 2 + 0 = 2$ | ... | 2 | ... | ... | ... | ... | 2 | | | | | | | | | | |
| 9 | $\div$ | ${}^1V_6 \div {}^1V_7$ | ${}^3V_{11}$ | $\{{}^1V_6 = {}^1V_6,\ {}^0V_{11} = {}^3V_{11}\}$ | $= \frac{2n}{2} = A_1$ | ... | ... | ... | ... | ... | $2n$ | 2 | ... | ... | ... | $\frac{2n}{2} = A_1$ | | | | | | |
| 10 | $\times$ | ${}^1V_{21} \times {}^3V_{11}$ | ${}^1V_{12}$ | $\{{}^1V_{21} = {}^1V_{21},\ {}^3V_{11} = {}^3V_{11}\}$ | $= B_1 \cdot \frac{2n}{2} = B_1 A_1$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | $\frac{2n}{2} = A_1$ | $B_1 \cdot \frac{2n}{2} = B_1 A_1$ | ......... | $B_1$ | | | |
| 11 | $+$ | ${}^1V_{12} + {}^1V_{13}$ | ${}^2V_{13}$ | $\{{}^1V_{12} = {}^0V_{12},\ {}^1V_{13} = {}^2V_{13}\}$ | $= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} + B_1 \cdot \frac{2n}{2}$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ......... | 0 | $\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} + B_1 \cdot \frac{2n}{2}\right\}$ | | | | |
| 12 | $-$ | ${}^1V_{10} - {}^1V_1$ | ${}^2V_{10}$ | $\{{}^1V_{10} = {}^2V_{10},\ {}^1V_1 = {}^1V_1\}$ | $= n - 2\ (=2)$ | 1 | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | $n-2$ | | | | | | | |
| 13 | $-$ | ${}^1V_6 - {}^1V_1$ | ${}^2V_6$ | $\{{}^1V_6 = {}^2V_6,\ {}^1V_1 = {}^1V_1\}$ | $= 2n - 1$ | 1 | ... | ... | ... | ... | $2n-1$ | | | | | | | | | | | |
| 14 | $+$ | ${}^1V_1 + {}^1V_7$ | ${}^2V_7$ | $\{{}^1V_1 = {}^1V_1,\ {}^1V_7 = {}^2V_7\}$ | $= 2 + 1 = 3$ | 1 | ... | ... | ... | ... | ... | 3 | | | | | | | | | | |
| 15 | $\div$ | ${}^2V_6 \div {}^2V_7$ | ${}^1V_8$ | $\{{}^2V_6 = {}^2V_6,\ {}^2V_7 = {}^2V_7\}$ | $= \frac{2n-1}{3}$ | ... | ... | ... | ... | ... | $2n-1$ | 3 | $\frac{2n-1}{3}$ | | | | | | | | | |
| 16 | $\times$ | ${}^1V_8 \times {}^3V_{11}$ | ${}^4V_{11}$ | $\{{}^1V_8 = {}^0V_8,\ {}^3V_{11} = {}^4V_{11}\}$ | $= \frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3}$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | 0 | ... | ... | $\frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3}$ | | | | | | |
| 17 | $-$ | ${}^2V_6 - {}^1V_1$ | ${}^3V_6$ | $\{{}^2V_6 = {}^3V_6,\ {}^1V_1 = {}^1V_1\}$ | $= 2n - 2$ | 1 | ... | ... | ... | ... | $2n-2$ | | | | | | | | | | | |
| 18 | $+$ | ${}^1V_1 + {}^2V_7$ | ${}^3V_7$ | $\{{}^2V_7 = {}^3V_7,\ {}^1V_1 = {}^1V_1\}$ | $= 3 + 1 = 4$ | 1 | ... | ... | ... | ... | ... | 4 | | | | | | | | | | |
| 19 | $\div$ | ${}^3V_6 \div {}^3V_7$ | ${}^1V_9$ | $\{{}^3V_6 = {}^3V_6,\ {}^3V_7 = {}^3V_7\}$ | $= \frac{2n-2}{4}$ | ... | ... | ... | ... | ... | $2n-2$ | 4 | ... | $\frac{2n-2}{4}$ | ... | $\left\{\frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} \cdot \frac{2n-2}{3} = A_3\right\}$ | | | | | | |
| 20 | $\times$ | ${}^1V_9 \times {}^4V_{11}$ | ${}^5V_{11}$ | $\{{}^1V_9 = {}^0V_9,\ {}^4V_{11} = {}^5V_{11}\}$ | $= \frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} \cdot \frac{2n-2}{4} = A_3$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | 0 | | | | | | | | |
| 21 | $\times$ | ${}^1V_{22} \times {}^5V_{11}$ | ${}^0V_{12}$ | $\{{}^1V_{22} = {}^1V_{22},\ {}^0V_{12} = {}^2V_{12}\}$ | $= B_3 \cdot \frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} \cdot \frac{2n-2}{3} = B_3 A_3$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | 0 | $B_3 A_3$ | ......... | ......... | $B_3$ | | |
| 22 | $+$ | ${}^2V_{12} + {}^2V_{13}$ | ${}^3V_{13}$ | $\{{}^2V_{12} = {}^0V_{12},\ {}^2V_{13} = {}^3V_{13}\}$ | $= A_0 + B_1 A_1 + B_3 A_3$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ......... | 0 | $\{A_3 + B_1 A_1 + B_3 A_3\}$ | | | | |
| 23 | $-$ | ${}^2V_{10} - {}^1V_1$ | ${}^3V_{10}$ | $\{{}^2V_{10} = {}^3V_{10},\ {}^1V_1 = {}^1V_1\}$ | $= n - 3\ (=1)$ | 1 | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | $n-3$ | | | | | | | |
| | | | | | Here follows a repetition of Operations thirteen to twenty-three. | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | $+$ | ${}^4V_{13} + {}^0V_{24}$ | ${}^1V_{24}$ | $\{{}^4V_{13} = {}^0V_{13},\ {}^0V_{24} = {}^1V_{24}\}$ | $= B_7$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ......... | ......... | ......... | ...... | ...... | ...... | $B_7$ |
| 25 | $+$ | ${}^1V_1 + {}^1V_3$ | ${}^1V_3$ | $\{{}^1V_1 = {}^1V_1,\ {}^1V_3 = {}^1V_3,\ {}^5V_6 = {}^0V_6,\ {}^5V_7 = {}^0V_7\}$ | $= n + 1 = 4 + 1 = 5$; by a Variable-card.; by a Variable card. | 1 | ... | $n+1$ | ... | ... | 0 | 0 | | | | | | | | | | |

Le premier programme informatique de l'histoire (1842) est dû à Ada Lovelace et permet de calculer les nombres de Bernoulli.

Quelques propriétés que l'on peut conjecturer :

- Les $B_n$ sont rationnels.
- Les nombres $B_{2n+1}$, pour $n \geq 1$, sont nuls. Cela équivaut à dire que $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2}$ est paire.
- On a $(-1)^{n+1} B_{2n} \geq 0$ : la suite $(B_{2n})_{n \geq 1}$ est alternée.
- Les dénominateurs des $B_{2n}$ (pour $n \geq 1$), écrits sous forme irréductible, sont divisibles par 6.

$$1$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$

$$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$$

$$0, -\frac{1}{12}, 0, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}$$

$$0, \frac{1}{12}, 0, -\frac{7}{24}, 0, \frac{7}{12}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$$

$$-\frac{1}{30}, 0, \frac{2}{9}, 0, -\frac{7}{15}, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{9}$$

$$0, -\frac{3}{20}, 0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{7}{10}, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}$$

Quelques calculs faits sur Maple en avril dernier... Il faut apprendre à repérer les nombres de Bernoulli !

# Bernoulli, cotangente et zeta

On pose

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

On montre que :

$$g(x) = \frac{x}{2} \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{x}{2} \coth\left(\frac{x}{2}\right).$$

En posant $z = -\frac{ix}{2}$ on en déduit :

$$z \cot(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n B_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Une autre formule célèbre due à Euler dit que :

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} = \text{"} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{x+n} \text{"},$$

ce qui peut se transformer en :

$$x \cot(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^{2k}}{\pi^{2k}} \zeta(2k),$$

où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ pour $s > 1$.

En identifiant les coefficients des deux expansions, on arrive à :

**Théorème**

Pour tout $k \geq 1$,

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}.$$

Comme $\zeta(s) \xrightarrow[s \to \infty]{} 1$, on en déduit l'équivalent :

$$|B_{2k}| \sim \frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}},$$

et on retrouve que le rayon de convergence de $\frac{x}{e^x - 1}$ est bien $2\pi$.

On peut prolonger la fonction $\zeta$ à $\mathbb{C} - \{1\}$, et celle-ci vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

On en déduit la valeur de $\zeta$ pour les entiers négatifs :

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}.$$

C'est le sens rigoureux qu'on peut donner à la fameuse fausse équation :

$$1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

# Formule d'Euler–Maclaurin

La formule donnant les sommes des puissances d'entiers se généralise à toutes les fonctions suffisamment régulières :

**Théorème**

Si $f$ est lisse sur $[a, b]$ alors :

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \int_a^b f(t)dt + \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\right]_a^b + R_m.$$

Le reste $R_m$ est explicite si on connaît les polynômes de Bernoulli. Assez souvent on peut montrer que $R_m \to 0$.

Une première application, avec $f(x) = 1/x$ :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} + O\left(\frac{1}{n^{2p+1}}\right).$$

Autre application, avec $f(x) = \ln(x)$ :

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{k+1} B_{k+1}}{k(k+1)n^k} + O\left(\frac{1}{n^{K+1}}\right). \end{aligned}$$

# Si vous avez des idées...

## Conjecture

$p$ est premier si et seulement si $pB_{p-1} = -1 \mod p$.

## Conjecture

Soit

$$R(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)\cdots(2k-1)x^k}{(2\pi)^{2k}\left(\frac{B_{2k}}{2k}\right)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ alors $R(x) = o(x^{\varepsilon})$ lorsque $x \to \infty$.

# Bibliographie


- *The Bernoulli Numbers : a Brief Primer*, Nathaniel Larson.
- La page Wikipedia anglaise "Bernoulli Number".
- Toute la première partie du sujet Math B MP de Polytechnique 2022 !!

Merci aux organisateurs, et merci pour votre attention !