



Olympiades académiques de mathématiques

Académie d'Aix-Marseille

Mercredi 11 mars 2020

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercices académiques

Cette sous-épreuve comporte deux exercices, à traiter dans le temps imparti.

Les binômes composés de candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité doivent traiter les exercices 1 et 2.

Les autres binômes doivent traiter les exercices 1 et 3.

Pour chaque binôme une seule copie est à rendre, avec le nom des deux élèves ayant composé.

Durée de la composition : 2 heures

Ce sujet comporte 8 pages dont celle-ci.

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats) :

Nombres parfaits, abondants ou déficients

Nicomache de Gêrase (en Jordanie) mathématicien, musicologue et philosophe grec a introduit cette notion au premier siècle après JC :



- Un nombre est **abondant** lorsque la somme de ses diviseurs est supérieure à 2 fois ce nombre.
- Un nombre est **parfait** lorsque la somme de ses diviseurs est égale à 2 fois ce nombre.
- Un nombre est **déficient** lorsque la somme de ses diviseurs est inférieure à 2 fois ce nombre.

En quelque sorte, un nombre abondant est un nombre qui possède beaucoup de diviseurs et un nombre déficient en possède peu.

PARTIE I : Nature des 200 premiers entiers naturels non nuls

On note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs d'un entier naturel n non nul.

Par exemple, 4 étant divisible par 1, 2 et 4, on a $\sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7$, or $7 < 2 \times 4$ donc 4 est déficient.

- 1) Déterminer la nature (abondant, parfait ou déficient) des entiers 6, 9 et 12. Justifier.
- 2) L'algorithme ci-dessous permet de donner la nature des premiers entiers naturels non nuls. Les résultats obtenus pour les 200 premiers entiers sont donnés dans le tableau ci-contre.

Compléter l'algorithme (on ne recopiera en réponse que les lignes 5, 10, 12 et 15).

Algorithme :

```

1. def sigma(n) :
2.     somme = 0
3.     for i in range(1 , n+1) :
4.         if n%i == 0 :
5.             somme = .....
6.     return somme
8. def nature(n) :
9.     somme = sigma(n)
10.    if ..... :
11.        nature = "déficient"
12.    elif ..... :
13.        nature = "parfait"
14.    else :
15.        nature="....."
16.    return nature
    
```

Remarque :

```

a%b renvoie le reste de la
division euclidienne de a par b.

Par exemple, 13%5 renvoie 3
    
```

Nature des 200 premiers entiers :

Déficients	Parfaits	Abondants
1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 64, 65, 67, 68, 69, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 79, 81, 82, 83, 85, 86, 87, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 98, 99, 101, 103, 105, 106, 107, 109, 110, 111, 113, 115, 116, 117, 118, 119, 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 129, 130, 131, 133, 134, 135, 136, 137, 139, 141, 142, 143, 145, 146, 147, 148, 149, 151, 152, 153, 154, 155, 157, 158, 159, 161, 163, 164, 165, 166, 167, 169, 170, 171, 172, 173, 175, 177, 178, 179, 181, 182, 183, 184, 185, 187, 188, 189, 190, 191, 193, 194, 195, 197, 199.	6, 28	12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96, 100, 102, 104, 108, 112, 114, 120, 126, 132, 138, 140, 144, 150, 156, 160, 162, 168, 174, 176, 180, 186, 192, 196, 198, 200.

PARTIE II : Conjectures

À partir de ce tableau, on peut conjecturer un certain nombre de résultats.
Les questions suivantes vont permettre de valider ou de contredire ces conjectures.

On pourra s'appuyer pour certaines démonstrations sur le théorème suivant :

Théorème de décomposition en produit de facteurs premiers :

Tout nombre entier strictement positif admet une **unique décomposition** en produit de facteurs premiers.

Par exemple, l'unique décomposition en produit de facteurs premiers de 45 est $45 = 3^2 \times 5$.

- 1) Conjecture 1 : Tout nombre premier est déficient.
 - a. Tester la conjecture en prenant un exemple.
 - b. Justifier que, pour n nombre premier, on a $\sigma(n) = 1 + n$
 - c. La conjecture est-elle vraie ? Justifier.
- 2) Conjecture 2 : Tout nombre abondant est pair.
 - a. Décomposer en produit de facteurs premiers 945.
 - b. En déduire la liste des diviseurs de 945.
 - c. Vérifier que $\sigma(945) = 1920$.
 - d. La conjecture est-elle vraie ? Justifier.
- 3) Conjecture 3 : Tout multiple de 6, excepté 6, est abondant.
 - a. Tester la conjecture en prenant un exemple.
 - b. Justifier que, pour n multiple de 6 strictement supérieur à 36, on a :
$$\sigma(n) \geq 1 + 2 + 3 + 6 + \frac{n}{6} + \frac{n}{3} + \frac{n}{2} + n$$
 - c. Vérifier que $\sigma(n) \geq 12 + 2n$ dans les conditions de la question précédente.
 - d. La conjecture est-elle vraie ? Justifier.
- 4) Conjecture 4 : Tout nombre produit de 2 nombres premiers impairs est déficient.
 - a. Tester la conjecture en prenant un exemple.
 - b. Justifier que, pour $n = pq$ avec p et q premiers impairs tels que $p < q$, on a $\sigma(n) = 1 + p + q + pq$.
 - c. Vérifier que $1 + p + q < pq$.
 - d. La conjecture est-elle vraie ? Justifier.
- 5) Conjecture 5 : Tout carré d'un nombre premier est déficient.
 - a. Tester la conjecture en prenant un exemple.
 - b. Justifier que, pour $n = p^2$ avec p premier, on a $\sigma(n) = 1 + p + p^2$.
 - c. Vérifier que $1 + p < p^2$.
 - d. La conjecture est-elle vraie ? Justifier.
- 6) Conjecture 6 : Toute puissance de 2 est un nombre déficient.
 - a. Quels sont les diviseurs de 2^5 ? Vérifier que 2^5 est déficient.
 - b. Justifier que, pour p entier naturel, $\sigma(2^p) = 2^{p+1} - 1$.
 - c. La conjecture est-elle vraie ? Justifier.

Exercice 2 (à traiter par les candidats de la voie générale ayant choisi la spécialité mathématique) :

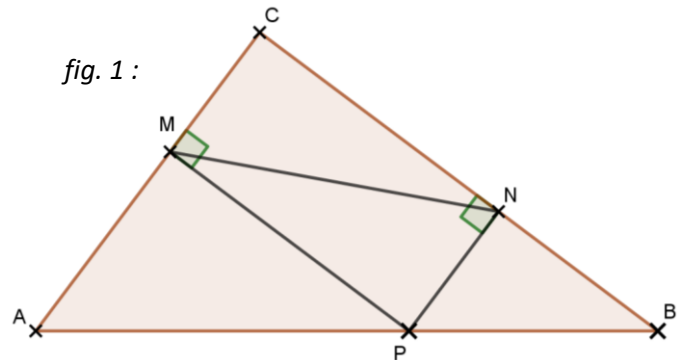
Naufrage dans l'archipel des îles Triangles

Dans ce sujet, on cherche à minimiser des longueurs.

On pourra entre autres utiliser la propriété suivante : la distance la plus courte d'un point M à une droite (d) est la longueur du segment perpendiculaire à la droite (d) passant par le point M .

Robinson se retrouve échoué dans l'archipel des îles Triangles...

- I. La première île sur laquelle il échoue a la forme d'un triangle dont les côtés mesurent 3, 4 et 5 km. On donne ci-contre le plan de l'île à l'échelle, avec les notations à utiliser (fig. 1).



- 1) Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

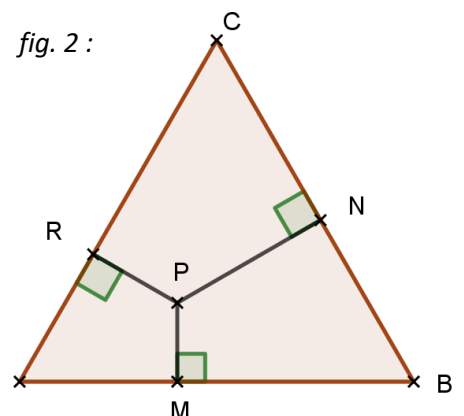
Il veut établir son camp de base en P , quelque part sur la plage $[AB]$. Tous les jours, il compte se rendre sur les deux autres plages en empruntant des chemins $[PM]$ et $[PN]$ perpendiculaires aux rivages, comme indiqué sur la figure 1. Il voudrait que le trajet qui lui permet d'aller de M jusqu'à N soit le plus court possible. Nous allons donc chercher, par deux méthodes différentes, la position du point P_0 qui minimise la distance MN .

- 2) On note $x = AP$.
- Exprimer PM puis PN en fonction de x .
 - Exprimer MN en fonction de x .
 - En déduire la position du point P_0 qui minimise la distance MN .

- 3) Démontrer que P_0 est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC .

- II. Il se retrouve ensuite sur une île ayant la forme d'un triangle équilatéral de côté 5 km, dont le plan à l'échelle est donné ci-dessous (fig. 2). Cette fois-ci, il décide d'établir son camp de base dans l'intérieur de l'île. Il souhaite se rendre sur chacune des trois plages par le chemin le plus court, et minimiser ses trajets. Pour cela, on cherche à placer le point P pour que la distance $d = PM + PN + PR$ soit minimale.

- 1) Il pense établir son camp P au centre de gravité de l'île. Calculer alors la distance d .
Indication : dans un triangle, le centre de gravité se trouve au tiers de chaque médiane.



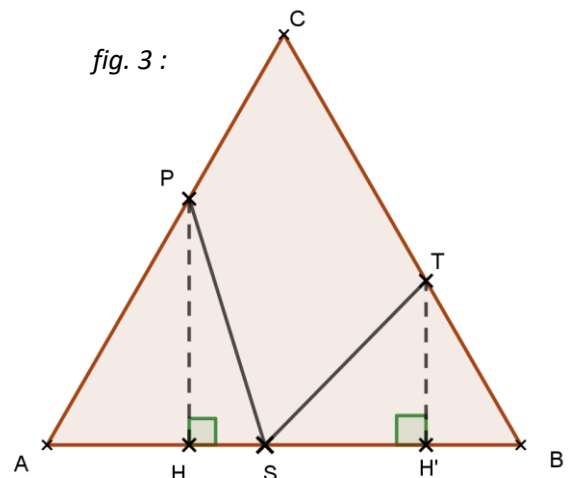
- 2) Il se rend compte finalement que quel que soit le lieu où il installe son camp P , la distance d reste identique. On cherche à le démontrer.
- En découpant le triangle ABC en trois triangles APB , BPC , et CPA , exprimer son aire totale.
 - En déduire que la distance d ne dépend pas de la position de P à l'intérieur du triangle ABC .

III. Il installe finalement son camp sur la plage $[AC]$ à 3 km de A . Il souhaite aller cueillir des noix de coco qui poussent en T sur la plage $[BC]$, à 2 km de B , mais en chemin, il doit passer sur la plage $[AB]$ en un point S quelconque, et souhaite que son trajet soit le plus court possible (fig. 3).

- 1) Calculer AH , BH' puis HH' .
- 2) On note $x = HS$.
Démontrer que la longueur totale de son trajet est :

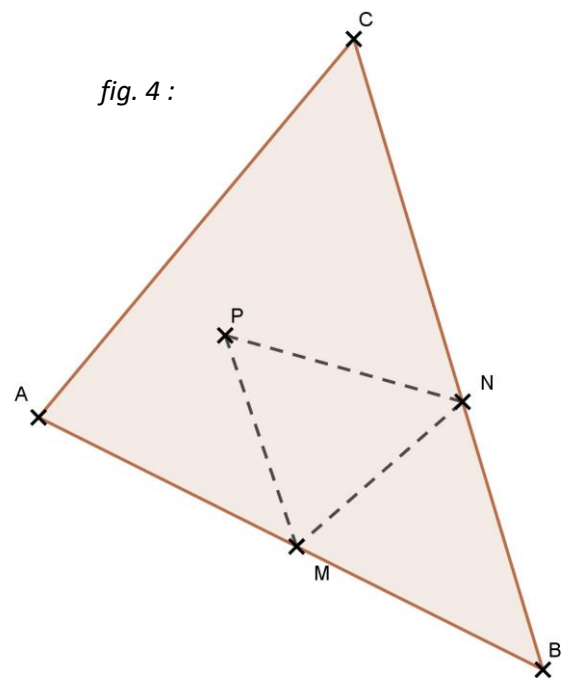
$$l(x) = \sqrt{x^2 + \frac{27}{4}} + \sqrt{\left(\frac{5}{2} - x\right)^2 + 3}$$

- 3) A l'aide de la calculatrice, conjecturer la valeur de x qui lui permet de minimiser son trajet, ainsi que la longueur totale du trajet ainsi effectué.
- 4) Soit P' le symétrique de P par rapport à (AB) .
 - a. Démontrer que le point S_0 qui permet d'effectuer un trajet minimal est le point d'intersection de $(P'T)$ et de (AB) .
 - b. En déduire une validation de la conjecture précédente.



IV. La dernière île sur laquelle il échoue a la forme d'un triangle quelconque dont le plan à l'échelle est donné ci-dessous (fig.4).

- 1) Il installe tout d'abord son camp dans l'intérieur de l'île, au point P repéré sur la carte (fig. 4).
Il souhaite pouvoir se rendre sur la plage $[AB]$ puis sur la plage $[BC]$ et enfin revenir en P .
Par une méthode géométrique, construire, sur la figure en annexe page 8, les points $M_0 \in [AB]$ et $N_0 \in [BC]$ qui permette de minimiser son trajet total.
- 2) Il décide finalement de s'installer sur la plage $[AC]$.
Justifier que le point $P_0 \in [AC]$ où il doit installer son camp pour que son trajet soit minimal est le pied de la hauteur issue de B .



Exercice 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale) :

Optimisation d'un emballage en aluminium.

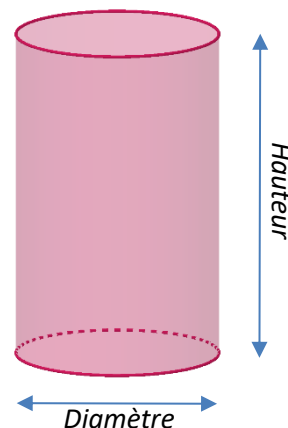
Les canettes en aluminium sont des boîtes métalliques qui permettent de contenir du liquide.

Dans cet exercice, nous allons étudier différents formats de canettes qui peuvent contenir 33 cL de liquide, et tenter de déterminer les dimensions qui permettent de minimiser la surface d'aluminium nécessaire à leur confection.

Partie 1 : Classique ou « sleek » ?

Les canettes sont généralement de forme cylindrique. Elles ont des bords légèrement biseautés, mais nous négligerons ici cet aspect et les assimilerons à des cylindres.

La canette classique est le modèle le plus répandu, mais récemment de nouveaux formats sont apparus, notamment la canette « sleek » de forme plus allongée.



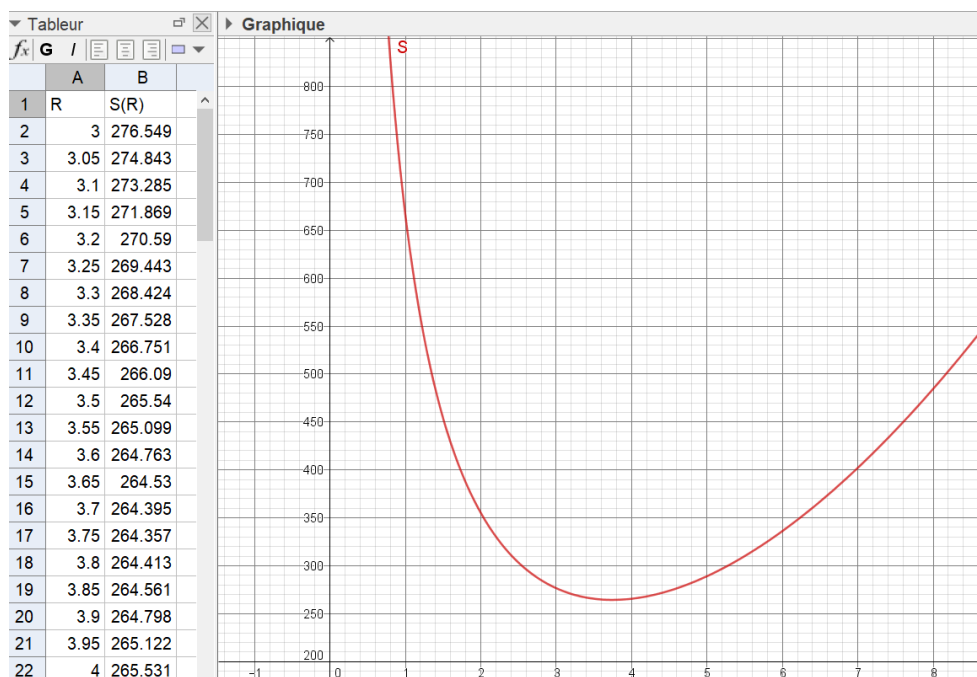
- 1) Une canette classique a une hauteur de 10,3 cm et son disque de base a un diamètre de 6,4 cm.
Vérifier que la canette classique permet effectivement de contenir 33 cL de liquide.
- 2) Réaliser à l'échelle 1/2 le patron d'une telle canette, en indiquant clairement les dimensions de chaque élément, arrondies au dixième.
- 3) Une canette sleek a une hauteur de 12,5 cm.
Calculer, au mm près, le diamètre minimal d'une canette sleek pour qu'elle puisse contenir 33 cL de liquide.
- 4) Laquelle de ces deux canettes permet d'utiliser le moins d'aluminium ?

Partie 2 : La canette optimale

Un fabricant de canettes souhaite proposer un nouveau modèle cylindrique d'un volume de 33 cL qui minimiserait la quantité d'aluminium nécessaire à sa production.

On note h la hauteur du cylindre et R le rayon du disque de base, en cm.

- 1) Exprimer h en fonction de R .
- 2) Démontrer que la surface totale d'aluminium, en cm^2 , nécessaire à la confection d'une canette contenant exactement 33 cL est donnée en fonction de R par : $S = 2\pi R^2 + \frac{660}{R}$
- 3) Pour étudier cette fonction, on a réalisé le graphique et le tableau de valeurs suivants :



- a. Quelle formule a été saisie dans la cellule B2 avant d'être recopiée vers le bas ?
- b. En utilisant ces données, quel est l'encadrement le plus précis que l'on peut obtenir du rayon R_0 qui donne une surface latérale minimale ?
- c. Recopier et compléter les quatre dernières lignes de l'algorithme suivant pour que l'affichage produit donne un encadrement d'amplitude 10^{-3} du rayon R_0 cherché.
- d. Après exécution de cet algorithme, on obtient l'affichage suivant :

borne inférieure = 3.7445
borne supérieure = 3.7455

En déduire l'arrondi à 10^{-3} près de R_0 .

- 4) Quel est le pourcentage d'aluminium que permettrait de gagner cette évolution par rapport à une canette classique ?

```

from math import *
def S(R) :
    S = 2*pi*R**2 + 660/R
    return (S)
p = 0.0005
a = 3
b = 3 + p
while S(b) < S(a) :
    a = .....
    b = .....
print ("borne inférieure = ",.....)
print ("borne supérieure = ",.....)

```

Partie 3 : D'autres formats

- 1) On envisage de produire des canettes ayant la forme d'un prisme droit à base carrée, et qui permettent toujours de contenir un volume de 33 cL.
 - a. Quelles seraient, au mm près, les dimensions qui permettraient de minimiser la surface d'aluminium utilisé ?
 - b. Que pensez-vous de cette solution par rapport au format cylindrique ?
- 2) On envisage de produire des canettes ayant la forme d'une sphère.
 - a. Déterminer, au mm près, le rayon minimum de la sphère permettant de contenir 33cL de liquide.
 - b. En déduire la surface d'aluminium nécessaire à sa production.
 - c. Que pensez-vous de cette solution ?

Formulaire :

Volume d'un cylindre = (Aire de la base) × hauteur

Aire d'un disque = $\pi \times \text{rayon}^2$

périmètre d'un cercle = $2\pi \times \text{rayon}$

Volume d'une sphère = $\frac{4}{3}\pi \times \text{rayon}^3$

Surface latérale d'une sphère = $4\pi \times \text{rayon}^2$

Annexe à rendre avec la copie

NOMS Prénoms des membres du binôme :

-

-

Exercice 2 (à traiter par les candidats de la voie générale ayant choisi la spécialité mathématique) :

