DEUX EXERCICES ISSUS DES OLYMPIADES DE PREMIÈRE POUR S'AMUSER

EXERCICE 1 - [Tous niveaux à partir de la fin de troisième]

Tablettes de chocolat

Partie 1.

Karim a une tablette de chocolat, avec m carrés dans un sens et n dans l'autre, donc $m \times n$ carrés en tout.
On dira dans la suite qu'une telle tablette est de taille $m \times n$.
Pour préparer un gâteau, il veut découper sa tablette en petits carrés de taille 1×1.
Une découpe consiste à prendre un morceau et à le couper en deux.
Par exemple, si on a un morceau de taille 2×3, on peut le couper pour obtenir deux morceaux de taille 1×3, ou bien un morceau de taille 2×2 et un de taille 1×2.
On peut ensuite redécouper chacun de ces morceaux.

1. Combien de découpes sont nécessaires pour couper en carrés de 1x1 si la tablette est :
a) de taille 2×2? **b)** de taille 2×3? **c)** de taille 2×4?

2. Soit p un entier.
a) Combien de morceaux y a-t-il après p découpes?
b) En déduire que, pour tous m et n, il faut exactement $mn - 1$ découpes pour couper en carrés de 1x1.

Partie 2.

Maintenant Karim utilise un couteau qui lui permet de couper plusieurs morceaux à la fois en les réalignant.
Par exemple si la tablette fait 1×4, il peut d'abord couper deux morceaux de 1×2, puis mettre ces morceaux l'un par-dessus l'autre pour couper les deux morceaux restants de taille 1×2 ensemble.
Il suffit donc de deux coupes dans cet exemple, au lieu de trois avant.

1. Combien de coupes suffisent pour couper en carrés de 1x1 :
a) une tablette de taille 1×8? **b)** une tablette de taille 1×16?

2. Montrer que pour couper une tablette de taille 1×2^k en carrés de 1x1, il suffit de k découpes.

3. Montrer que réciproquement, pour couper une tablette de taille 1×2^k en carrés de 1x1, un minimum de k découpes est nécessaire.

4. Quelle est la meilleure stratégie pour couper en carrés de 1x1 une tablette de taille $1 \times n$?

5. Quelle est la meilleure stratégie pour couper en carrés de 1x1 une tablette de taille $2 \times n$?

EXERCICE 2 - [Tous niveaux à partir de la fin de troisième]

Nous souhaitons créer un jeu de cartes. Sur chaque carte seront représentés un certain nombre de symboles de manière que sur **deux cartes quelconques figurent toujours un symbole commun et un seul**.
Pour un jeu de trois cartes, on peut par exemple utiliser les symboles A, B et C, et les cartes AB, AC et BC. Dans cet exemple : 3 symboles ont été utilisés, il y a 2 symboles par carte et chaque symbole apparaît sur deux cartes.
L'ordre des symboles n'est pas pris en compte, ainsi AB et BA désignent la même carte.

Un jeu respectant les critères suivants sera dit « jeu valide » :

- **C1** : deux cartes quelconques disposent toujours d'un symbole commun et un seul
- **C2** : chaque symbole apparaît au moins deux fois dans le jeu
- **C3** : chaque symbole doit apparaître le même nombre de fois sur l'ensemble du jeu de cartes
- **C4** : le nombre de symboles par carte doit être le même pour toutes les cartes
- **C5** : une carte ne peut contenir deux fois le même symbole.

Nous noterons :

- *s* le nombre de **s**ymboles utilisés ; dans toute la suite, ces symboles seront notés A, B, C, D, ...
- *u* le nombre de cartes **u**tilisant un symbole donné.
- *p* le nombre de symboles **p**résents sur chaque carte .
- *c* le nombre de cartes dans le jeu.

I Découverte :

1. Les trois jeux suivants ne sont pas des jeux « valides ». Expliquer à chaque fois pourquoi :

- **Jeu 1 :** ABD ; ACE ; BCF **Jeu 2 :** ABC ; ADE ; BDF ; FAG ; GBE **Jeu 3 :** ABC ; ABD ; DC

2. Peut-on fabriquer un « jeu valide » de quatre cartes avec seulement deux symboles par carte ?

3. Une carte du « jeu valide » ci-contre suivant a été égarée.
Retrouver cette neuvième carte.

CEFG	DIGK	AJGL
CHIJ	?	DHFL
ABCD	BKFJ	BEIL

II Le cas *u = 2* :

1. Compléter le jeu de trois cartes proposé en exemple, pour obtenir un jeu valide de quatre cartes avec *u=2 ; s = 6* et *p = 3* :
Carte 1 : A B ... *Carte 2 : A C ...* *Carte 3 : B C ...* *Carte 4 : ... ...*

2. Chaque symbole n'apparaissant que deux fois dans le jeu, proposer une expression du nombre *c* de cartes en fonction de *p*. Conjecturer également une expression de *s* en fonction de *p*.

3. Toujours dans le cas où *u =2,* on suppose construit un jeu valide de *c* cartes.
Ecrire un algorithme permettant de compléter ce jeu en un jeu valide de *c+1* cartes.
On pourra écrire cet algorithme en français en utilisant l'instruction : « ajouter le symbole n°i à la carte n°j ».

III Le cas général : Dans cette partie, on considère un jeu valide de *c* cartes.

1. On recherche dans cette question des relations entre les nombres c, s, u et p.
a) Exprimer de deux façons différentes le nombre de couples de cartes.
b) Exprimer de deux façons différentes le nombre total de symboles dessinés dans le jeu.
c) En déduire les deux formules suivantes : $c = \mathrm{p}(\mathrm{u} - 1) + 1$ et $s = \frac{\mathrm{cp}}{\mathrm{u}}$.

2. Justifier qu'il n'existe pas de « jeu valide » de 8 cartes avec *u* = 3.

3. Montrer que le triplet (*s, u, p*) = (*14, 6, 4*) ne permet pas de construire un « jeu valide » de 21 cartes.
Que peut-on en conclure par rapport aux formules précédentes ?