QUELQUES EXERCICES POUR S'AMUSER

Les élèves intéressés sont invités, en attendant de se retrouver au lycée, à envoyer une solution ou demander des indications à : jerome.nicolas@ac-aix-marseille.fr

EXERCICE 1 - [Tous niveaux à partir de la fin de troisième]
(Dans cet exercice, on pourra utiliser librement le théorème déjà rencontré dans la fiche numéro 2 du demi-cercle suivant : *Pour tout point M d'un cercle de diamètre $[RS]$, si $M \neq R$ et $M \neq S$, alors le triangle RMS est rectangle en M.*)
On se propose dans cet exercice de prouver le résultat suivant :

Les segments de tangentes à un cercle issues d'un même point ont même longueur.

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre I, et un point M extérieur à ce cercle. Le cercle de diamètre $[MI]$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points que l'on note A et B.

1. Faire une figure à main levée et démontrer les relations suivantes : $(AI) \perp (AM)$ et $(BI) \perp (BM)$.
2. En déduire que les droites (AM) et (BM) sont tangentes à $\mathscr{C}$.
3. Par le théorème de Pythagore, montrer que : $AM = BM$, puis en déduire que la droite (IM) est la médiatrice de $[AB]$.

EXERCICE 2 - [Tous niveaux à partir de la fin de troisième]
Soit $ABCD$ un carré de côté 1. Soit M un point quelconque de la demi-droite $[BC)$. On note $a = BM$. Les droites (AM) et (BD) se coupent en I.

1. En introduisant la parallèle (BD) passant par A, montrer par le théorème de Thalès que : $IB = \dfrac{a\sqrt{2}}{a+1}$.
2. Montrer que l'aire de AIB vaut : $S = \dfrac{a}{2a+2}$.

EXERCICE 3 - [Conseillé à partir de la première mais tout à fait abordable avant]
Soient a, b et c trois réels positifs. Montrer que l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{4}$.

EXERCICE 4 - [Conseillé à partir de la première mais abordable avant]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$, n réels strictement positifs.
Montrer que : $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(\dfrac{1}{a_1} + \dots + \dfrac{1}{a_n}) \geq n^2$, soit $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geq n^2$.
Indication : par exemple, développer et penser à introduire pour $x > 0$ la fonction f définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

EXERCICE 5 - [Conseillé à partir de la terminale mais abordable avant]

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, $2n$ réels.
   a) Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|.|b_k| \leq \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$.
   Indication : Considérer par exemple le polynôme $f(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k x)^2$, développer puis utiliser, dans le cas général, les connaissances sur le second degré).
   b) Donner une condition nécessaire et suffisante simple sur les $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ pour que : $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$.
2. Retrouver avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz le résultat de la question 1. de l'exercice 4.