QUELQUES EXERCICES POUR S'AMUSER

Bienvenue au club de Mathématiques du lycée Saint Charles.

Les élèves intéressés sont invités, en attendant de se retrouver au lycée, à envoyer une solution ou demander des indications à : jerome.nicolas@ac-aix-marseille.fr

EXERCICE 1 - [Tous niveaux à partir de la fin de troisième]
Soit ABC un triangle isocèle en A. On suppose qu'il existe un point $D \in [BC]$, tel que $BD = BA$ et $DC = DA$. Dessiner une figure à main levée et calculer les trois angles du triangle ABC.

EXERCICE 2 - [Tous niveaux à partir de la fin de troisième]
(Dans cet exercice, on pourra utiliser librement le théorème (au programme de seconde mais souvent vu dès le collège) du demi-cercle suivant (encore appelé théorème du triangle inscrit dans un cercle dont l'un des côtés est un diamètre du cercle) : *Pour tout point M d'un cercle de diamètre $[RS]$, si $M \neq R$ et $M \neq S$, alors le triangle RMS est rectangle en M.*)

Sur un cercle de centre I, on considère deux points A et B, tels que : $(IA) \perp (IB)$.
Les cercles de diamètre $[IA]$ et $[IB]$ se recoupent en un point qu'on note J.

1. Faire une figure à main levée et montrer que les points B, J et A sont alignés.
   Indication : On pourra par exemple montrer que $\widehat{AJB} = 180°$ en visualisant deux triangles rectangles.
2. Montrer que J est le milieu de $[AB]$.

EXERCICE 3 - [Tous niveaux à partir de la fin de troisième]
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + y$.

EXERCICE 4 - [Conseillé à partir de la première mais tout à fait abordable avant]
(De l'importance d'une définition... Une fonction bleue? Une fonction vraiment...)
On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est **bleue** si pour tout réel x, il existe a et b réels tels que $f(x) = ax + b$.

1. Rappeler la définition d'une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction carré est bleue.
   Indication : Dans la définition d'une fonction bleue, il est essentiel de comprendre que rien n'empêche a et b de dépendre de x....
3. Montrer que la fonction carré n'est pas une fonction affine.
4. Montrer que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est bleue. Réciproquement, une fonction bleue est-elle une fonction définie sur $\mathbb{R}$? Déterminer l'ensemble des fonctions bleues. Commenter.

EXERCICE 5 - [Conseillé à partir de la première mais tout à fait abordable avant]

1. Soit, a, b, c, d des réels. Montrer l'identité de Lagrange suivante :
$$\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2.$$
2. On dit qu'un entier naturel n est somme de deux carrés, s'il existe deux entiers relatifs k et l tels que $n = k^2 + l^2$.
   a) Donner un exemple d'entier naturel qui n'est pas somme de deux carrés, puis un exemple d'entier naturel somme de deux carrés.
   b) Montrer que l'ensemble des entiers naturels sommes de deux carrés est stable par produit, c'est à dire que si n et m sont des entiers naturels sommes de deux carrés alors leur produit nm est encore somme de deux carrés.
   c) Pour ceux qui connaissent déjà les nombres complexes, interpréter l'identité de la question 1. en terme de nombres complexes.