

QUELQUES EXERCICES POUR S'AMUSER

Bienvenue au club de Mathématiques du lycée Saint Charles

L'idée avec ces exercices, ce n'est pas obligatoirement de savoir les résoudre pour l'instant mais simplement de saisir certaines subtilités et de peu à peu réussir à avancer sur une éventuelle solution.

Les élèves de première et terminale intéressés sont fortement invités à chercher les exercices signalés comme faisables à partir de l'entrée en seconde.

Les élèves de tous niveaux du lycée Saint Charles pourront rejoindre le club de Mathématiques qui se réunira pendant toute l'année 2023/2024. Les élèves intéressés sont invités, en attendant de se retrouver au lycée, à envoyer une solution ou demander des indications à : jerome.nicolas@ac-aix-marseille.fr

EXERCICE 1 - [Tous niveaux à partir de la fin de troisième]

Soient a, b et c trois réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Que vaut $a^4 + (ab + c)^2 + (ac - b)^2$?

Indication : Développer et réduire l'expression ci-dessus avec la double distributivité ou les identités remarquables pour ceux qui les ont déjà vues.

EXERCICE 2 - [Tous niveaux à partir de la fin de troisième]

Soient x et y deux réels tels que $x^2 + y^2 = 6xy$ avec $x > y > 0$. Déterminer la valeur $\frac{x+y}{x-y}$?

Indication : On pourra essayer de trouver une forme simple de $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$.

EXERCICE 3 - [Conseillé à partir de la première mais tout à fait abordable avant]

1. Pour a et b deux nombres réels, l'implication $[(a = b) \implies (a^2 = b^2)]$ est-elle vraie?
2. Pour a et b deux nombres réels, l'implication $[(a^2 = b^2) \implies (a = b)]$ est-elle vraie?
3. Pour a et b deux nombres réels **positifs**, justifier l'équivalence suivante : $[(a = b) \iff (a^2 = b^2)]$.
4. On considère l'équation (E) : $\sqrt{x^2 - 2x + 2} = x - 2$ d'inconnue x réelle.
 - a) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$. Quelle est l'utilité de ce calcul?
 - b) On raisonne par analyse-synthèse.
Dans cette question, concentrons-nous sur l'analyse du problème.
Supposons donc que $x \in \mathbb{R}$ soit une solution de (E), c'est à dire que $\sqrt{x^2 - 2x + 2} = x - 2$. En utilisant, la question 1, justifier qu'on a alors nécessairement $x = 1$.
 - c) Effectuons maintenant la synthèse. Le réel $x = 1$ est-il solution de (E)?
 - d) Finalement, déterminer l'ensemble des solutions de (E).

EXERCICE 4 - [Conseillé à partir de la première mais tout à fait abordable avant]

On rappelle que pour un réel x , on note $|x|$ la valeur absolue de x qui est définie par : $|x| = \begin{cases} +x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

On remarquera en particulier que pour tout réel x , on a toujours $|x| \geq 0$.

1. Donner les valeurs de $|6|$; $|-8|$; $|-\pi|$ et $|\frac{11}{3}|$.
2. Déterminer deux réels x et y tels que $|x + y| = |x| + |y|$.
3. Déterminer deux réels x et y tels que $|x + y| \neq |x| + |y|$.
4. Montrer que pour x et y réels, on a toujours

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (\text{Inégalité triangulaire}).$$

*Indication : On pourra utiliser que si a et b sont deux réels **positifs** alors : $(a \leq b) \iff (a^2 \leq b^2)$.*

5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour que $|x + y| = |x| + |y|$.

$$|\mathcal{G}r_{k,n}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p$$

Quelques liens intéressants

Quelques RDV pour les élèves intéressés :

1. Concours Castor informatique : <https://castor-informatique.fr>
(vers fin novembre, début décembre)
2. Concours Algoréa : <http://www.france-ioi.org/concours/algoréa>
(Concours en 6 tours de janvier à juillet avec Finale à Paris)
3. *TFJM*² : <https://tfjm.org/>
(Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématicien, début vers janvier)
4. Journée "filles, maths et informatique" : <https://filles-et-maths.fr/>
(Toute l'année, en présentiel ou en ligne)
5. Rdv des Jeunes Mathématiciennes : <https://filles-et-maths.fr/>
(Entre octobre et février, le week-end ou pendant les vacances, en présentiel ou en ligne)
6. Parlons Maths : <https://parlons-maths.fr/>
(Émission vidéo en direct avec interaction par tchat, un mercredi sur deux de 18h à 19h)
7. Les Olympiades d'informatique : <http://www.france-ioi.org/ioi/index.php>
(Sélection et entraînement de l'équipe de France (souvent d'anciens candidats d'Algoréa))
8. Préparation Olympique Française de Mathématiques : <https://maths-olympiques.fr/>
(Sélection et entraînement de l'équipe de France, organisé par Animaths. Debut en octobre)
9. Mathmosphère : <https://animath.fr/actions/mathmosphere/>
(Club virtuel de mathématiques proposant un contenu capable d'intéresser chaque élève motivé)