Le jeu de Voronoï

Comment y gagner ?

Sommaire

- Règles et but du jeu
- Notations et adaptation
- Le jeu en une dimension
- Passage à deux dimensions
- Conclusion

Règles et but du jeu

- Qu’est ce qu’un diagramme de Voronoï ?
  - Georgy Voronoï ou Voronoy (1868-1908)
  - Construction :

Règles et but du jeu

- Le jeu en action
- Avoir le plus d’espace possible
- Placer les points tour à tour
- Nombre de coups limité
- Nombre de joueurs variable

Notations et adaptation

- Notations :
  - c : le nombre de coups par joueur
  - j : le nombre de joueurs

Nous nous contenterons ici de j=2 joueurs avec un nombre c de coups entier

Le jeu en une dimension

- Avoir la plus grande partie du segment de longueur 1

  → Obtenir plus de la moitié du segment pour gagner

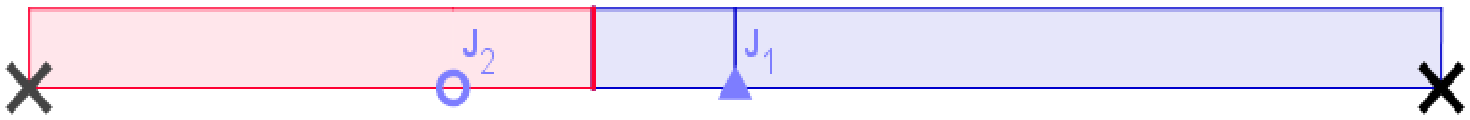
- Recherche de positions gagnantes
- Etablir des stratégies gagnantes
- Comment gagner en étant le joueur 1 ou le joueur 2

Le jeu en une dimension

- Pour c=1 coup par joueur

Le premier joueur gagne en jouant au milieu

$$L_2 = \frac{1}{2} - \frac{j_1 - j_2}{2} \qquad L_1 = \frac{1}{2} + \frac{j_1 - j_2}{2}$$



Le jeu en une dimension

- Pour c=2 coups par joueur

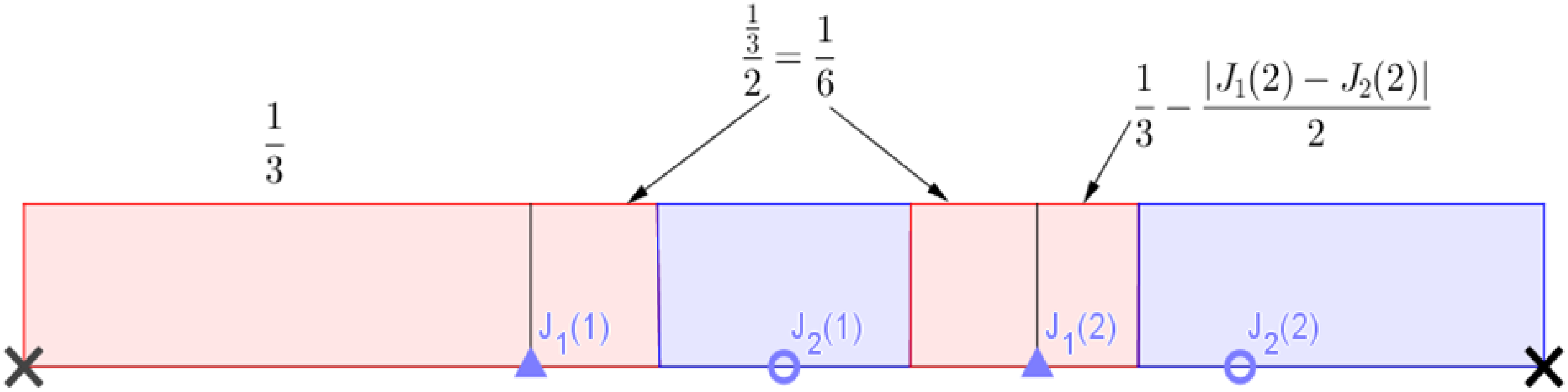
3 cas de jeux possibles :

1) [J1 / J2 / J1 /J2]   2) [J1 / J2 / J2 /J1]   3) [J2 / J1 / J1 /J2]

Idée de positions gagnantes : Jouer à 1/3 et 2/3

Le jeu en une dimension

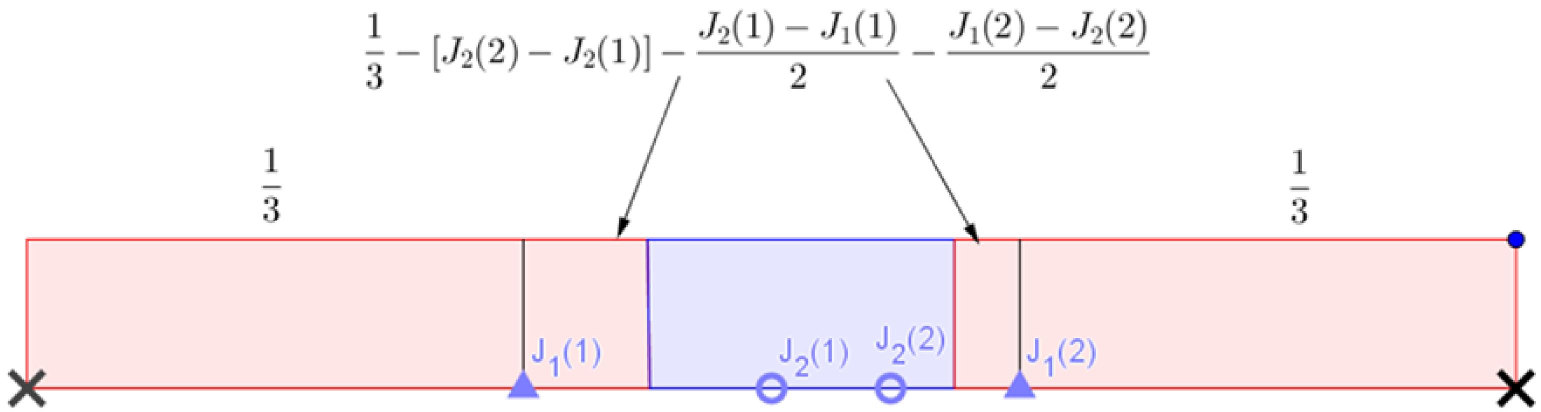
- Cas n°1 : [J1 / J2 / J1 /J2]



$$J_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + (nb.positif) \geq \frac{1}{2}$$

Le jeu en une dimension

- Cas n°2 : [J1 / J2 / J2 /J1]



$$J_1 = \frac{1}{3} + (nb.positif) + \frac{1}{3} \geq \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$

Le jeu en une dimension

- Cas n°3 : [J2 / J1 / J1 /J2]

  → Défaite du joueur 1

Le joueur 2 se place juste avant 1/3 et juste après 2/3.

Il remporte presque 2/3 ce qui laisse 1/3 au joueur 1.

Le joueur 1 n’a donc pas de stratégie gagnante de façon à s’assurer la victoire avec ces positions supposées gagnantes.

Le jeu en une dimension

- Recherche d’autres possibles positions gagnantes

  → Tentative de jeu à ¼ et ¾

Appelons désormais x et y les coups du joueur 2, avec x et y interchangeables.

Le jeu en une dimension

- Cas n°1 : [J1 / x / J1 / y]

$$J_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{y - \frac{3}{4}}{2}$$

$$J_1 = \frac{1}{2} + \frac{y - \frac{3}{4}}{2}$$

$$J_1 = \frac{1 + y - \frac{3}{4}}{2}$$

$$J_1 = \frac{y + \frac{1}{4}}{2}$$

$$J_1 = \frac{y}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{2}$$

Or : $y \geq \frac{3}{4}$

D'où : $\frac{y}{2} \geq \frac{3}{8}$

$$\frac{y}{2} + \frac{1}{8} \geq \frac{4}{8}$$

Donc : $J_1 \geq \frac{1}{2}$

Le jeu en une dimension

- Cas n°2 : , [J1 / x / y / J1]

$$J_1 = \frac{1}{4} + (\frac{1}{2} - \frac{x - \frac{1}{4}}{2} - \frac{\frac{3}{4} - y}{2}) + \frac{1}{4}$$

$$J_1 = \frac{1}{2} + (\frac{1 - x + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + y}{2})$$

$$J_1 = \frac{1}{2} + (\frac{\frac{1}{2} - x + y}{2})$$

Or : $\frac{1}{4} < x < y < \frac{3}{4}$

D'où : $0 < -x + y < \frac{3}{4} - x \leq \frac{1}{2}$

Alors : $\frac{\frac{1}{2} - x + y}{2} > 0$

Donc : $J_1 > \frac{1}{2}$

Le jeu en une dimension

- Cas n°3 : [x / J1 / J1 / y]

$$J_1 = \frac{\frac{1}{4} - x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{y - \frac{3}{4}}{2}$$

Or : $x < \dfrac{1}{4}$ et $y > \dfrac{3}{4}$

D'où : $\dfrac{\frac{1}{4} - x}{2} > 0 \; et \; \dfrac{y - \frac{1}{4}}{2} > 0$

$$\frac{\frac{1}{4} - x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{y - \frac{3}{4}}{2} > \frac{1}{2}$$

Donc : $J_1 > \dfrac{1}{2}$

Le jeu en une dimension

- Les positions ¼ et ¾ sont donc des positions gagnantes.
- Le joueur 1 peut tout de même perdre s'il ne possède pas les 2 positions gagnantes.

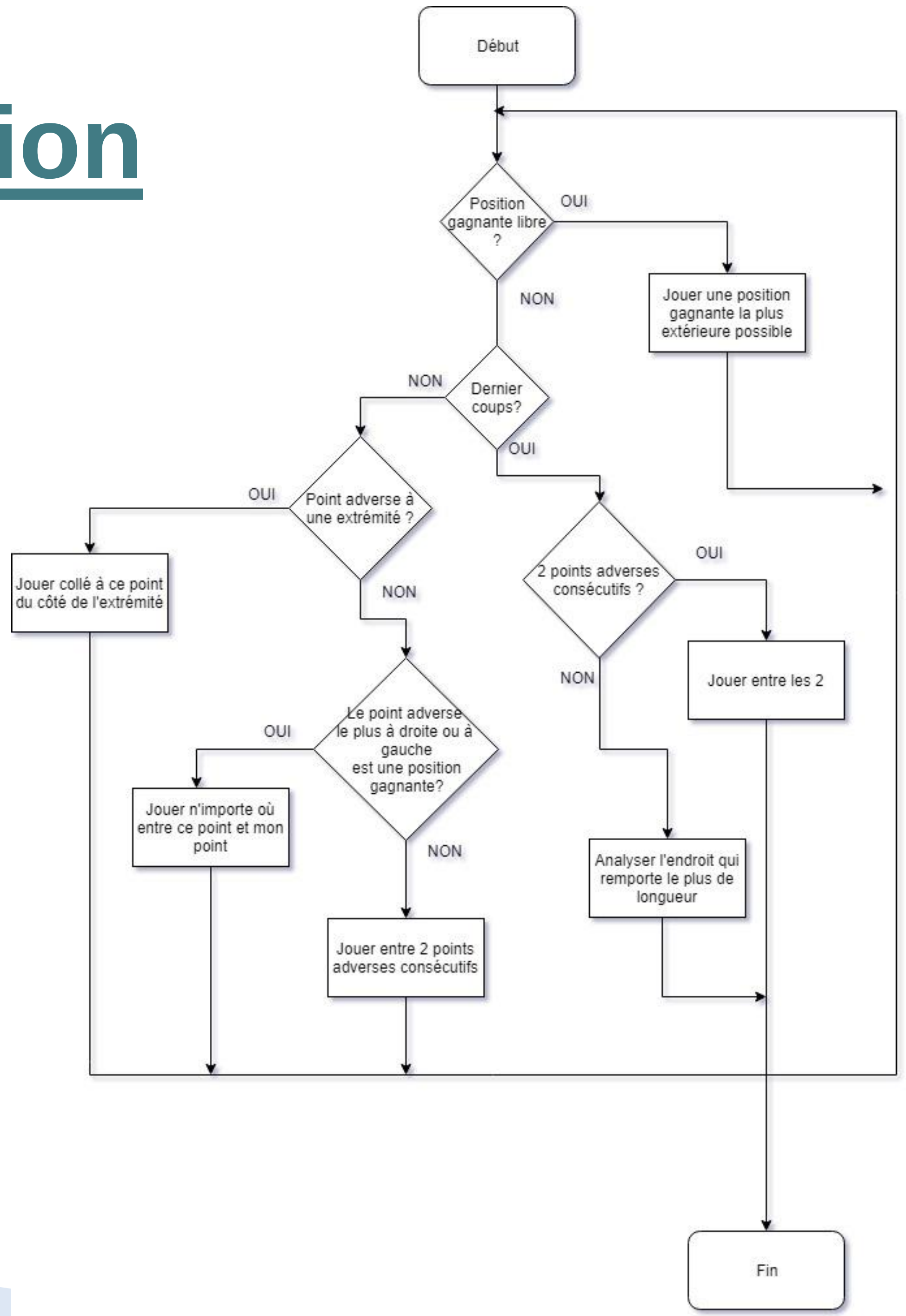
- En observant pour un nombre de coups supérieurs, nous avons conjecturé que les positions gagnantes p sont :

$$p_i = \frac{1}{2 \times c} + \frac{i}{c}$$

Avec i allant de 0 à c-1

Le jeu en une dimension

Stratégie gagnante pour
le second joueur:



Le jeu en 2D

- Avoir la plus grande aire du carré de $1cm^2$

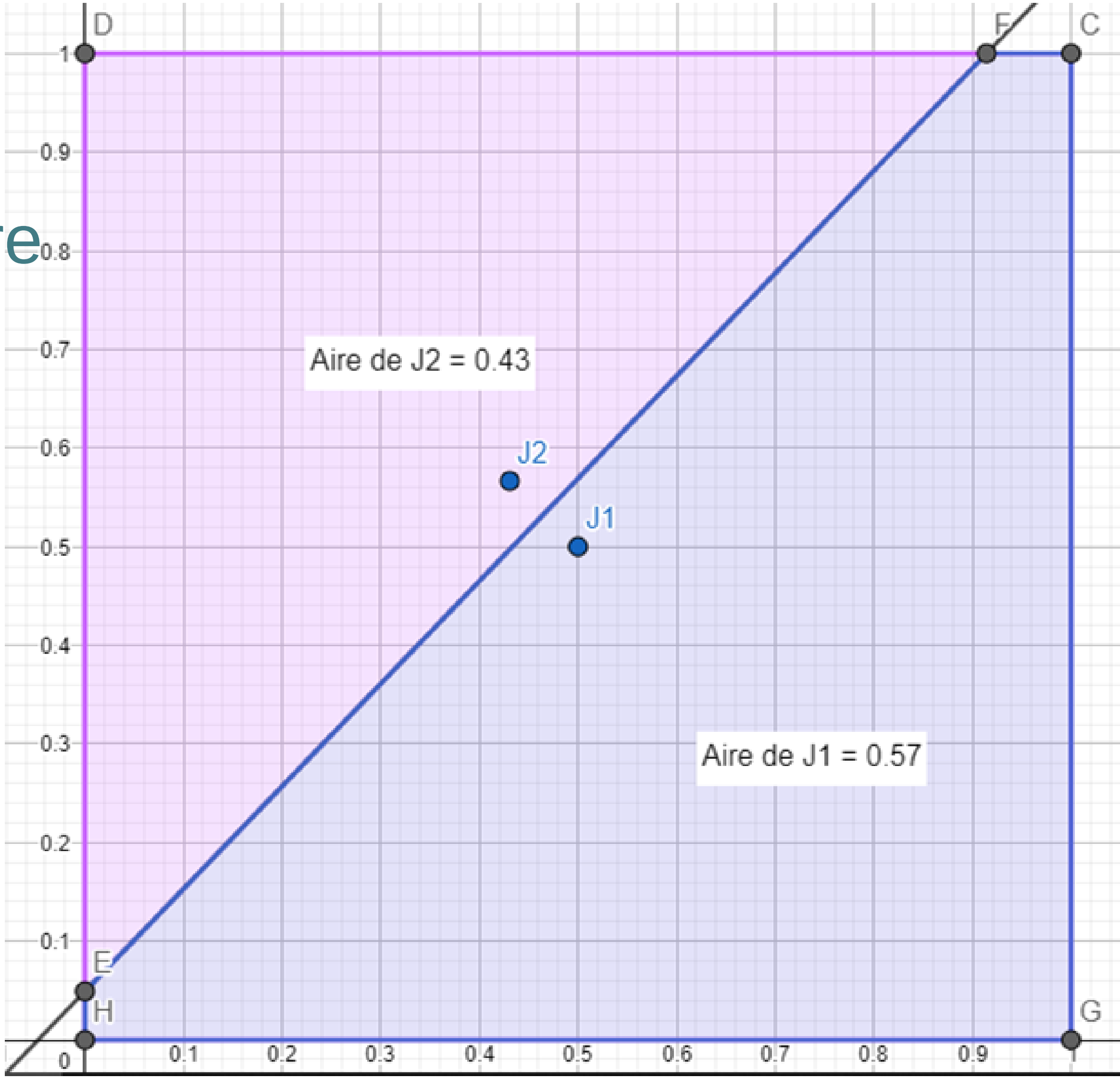
→ Obtenir plus de la moitié de l'aire pour gagner

- Recherche de positions gagnantes
- Etablir des stratégies gagnantes
- Comment gagner en étant le joueur 1 ou le joueur 2

Le jeu en 2D

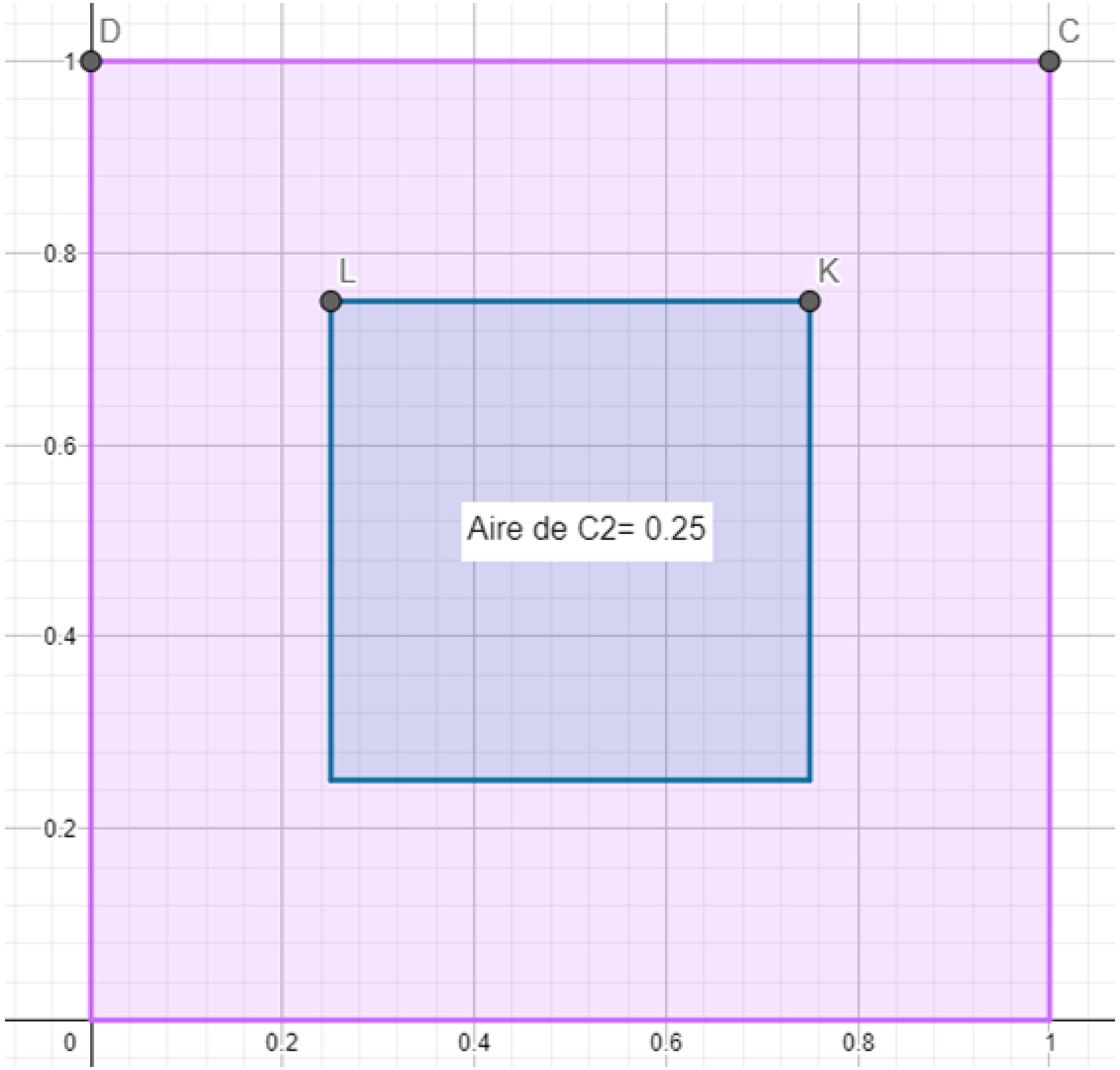
- Pour c=1 coup par joueur

Le premier joueur gagne en jouant au centre



Le jeu en 2D

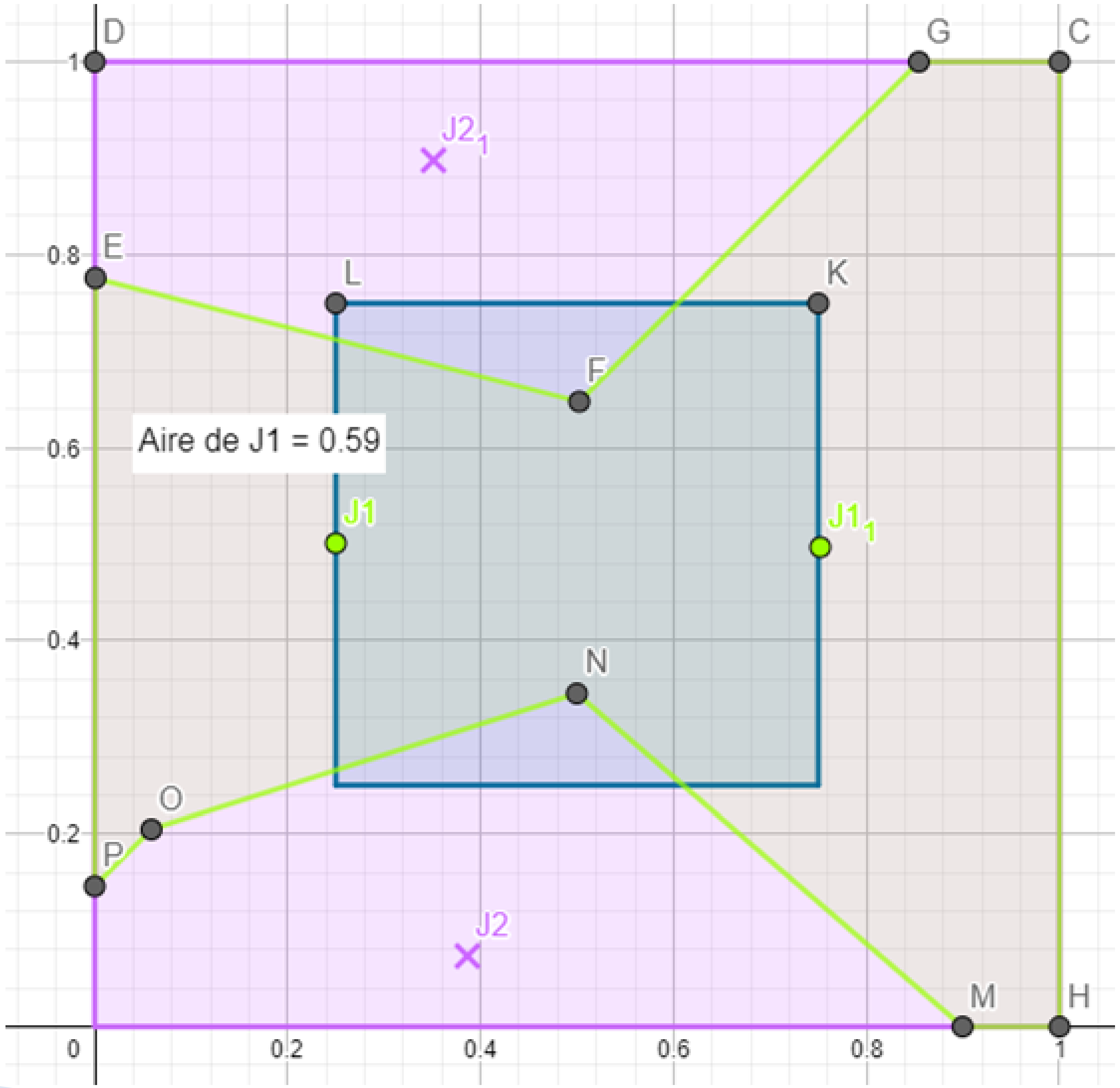
- Modifications du plan :
- Noté C_2



Le jeu en 2D

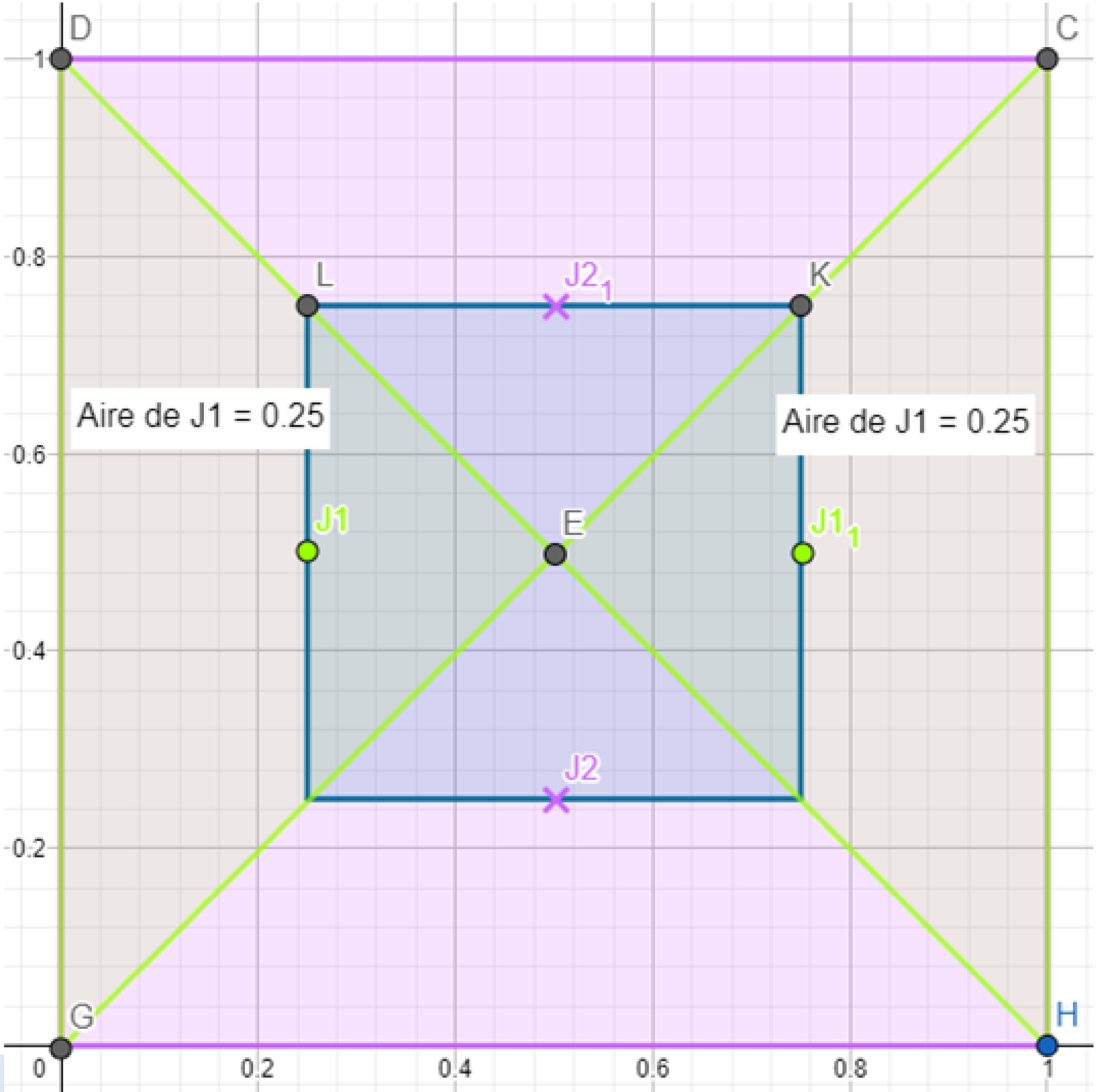
- Pour c=2
- J1 joue sur un coté de C_2 puis à l'opposé.

- 2 cas :
- J2 perd, s' il se place n'importe où.



Le jeu en 2D

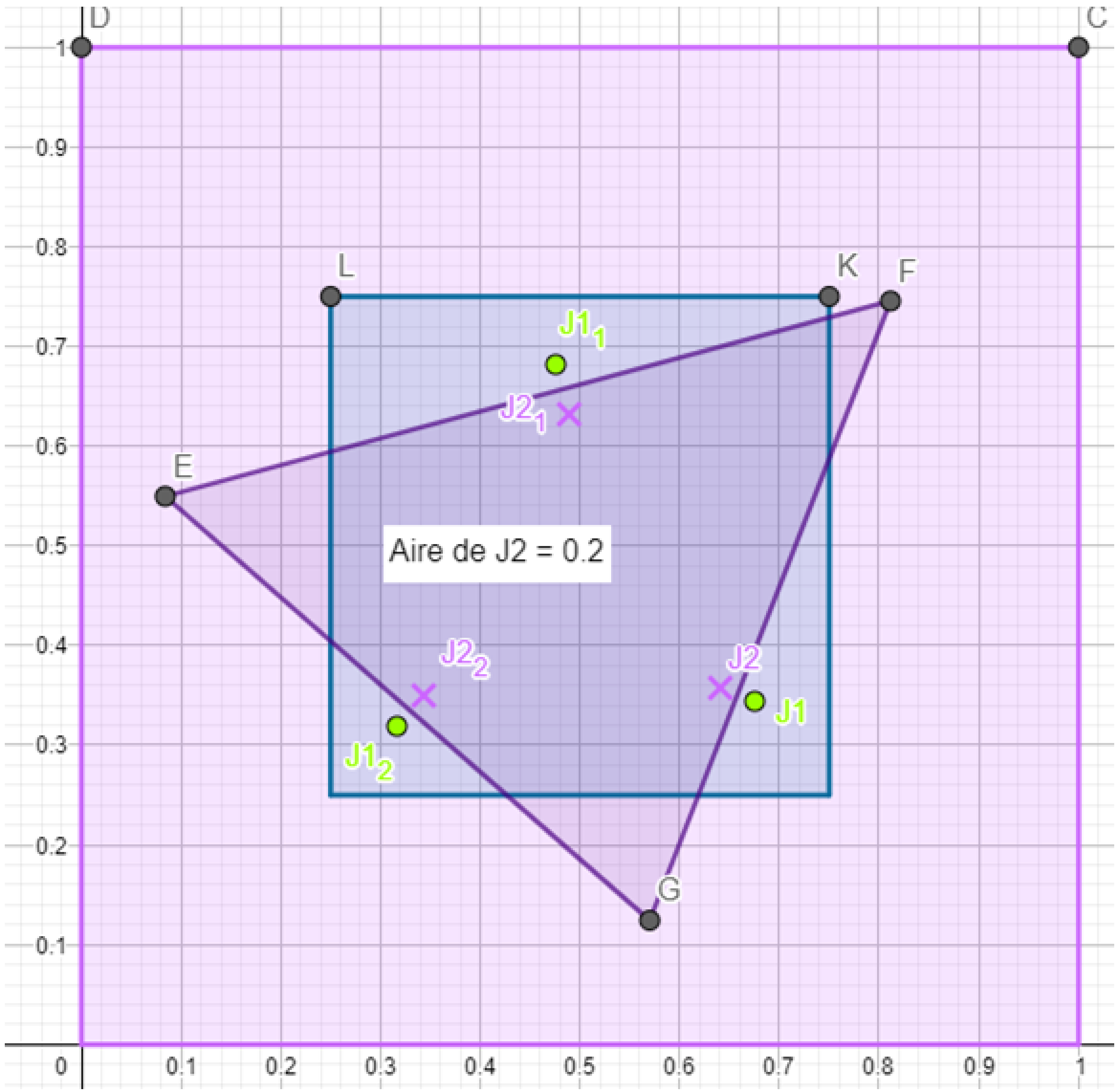
- 2ème cas:
- J2 joue comme J1, avec une rotation de 90°



Le jeu en 2D

- Pour c=3:
- Pas de stratégie gagnante
- Mais des cas particuliers

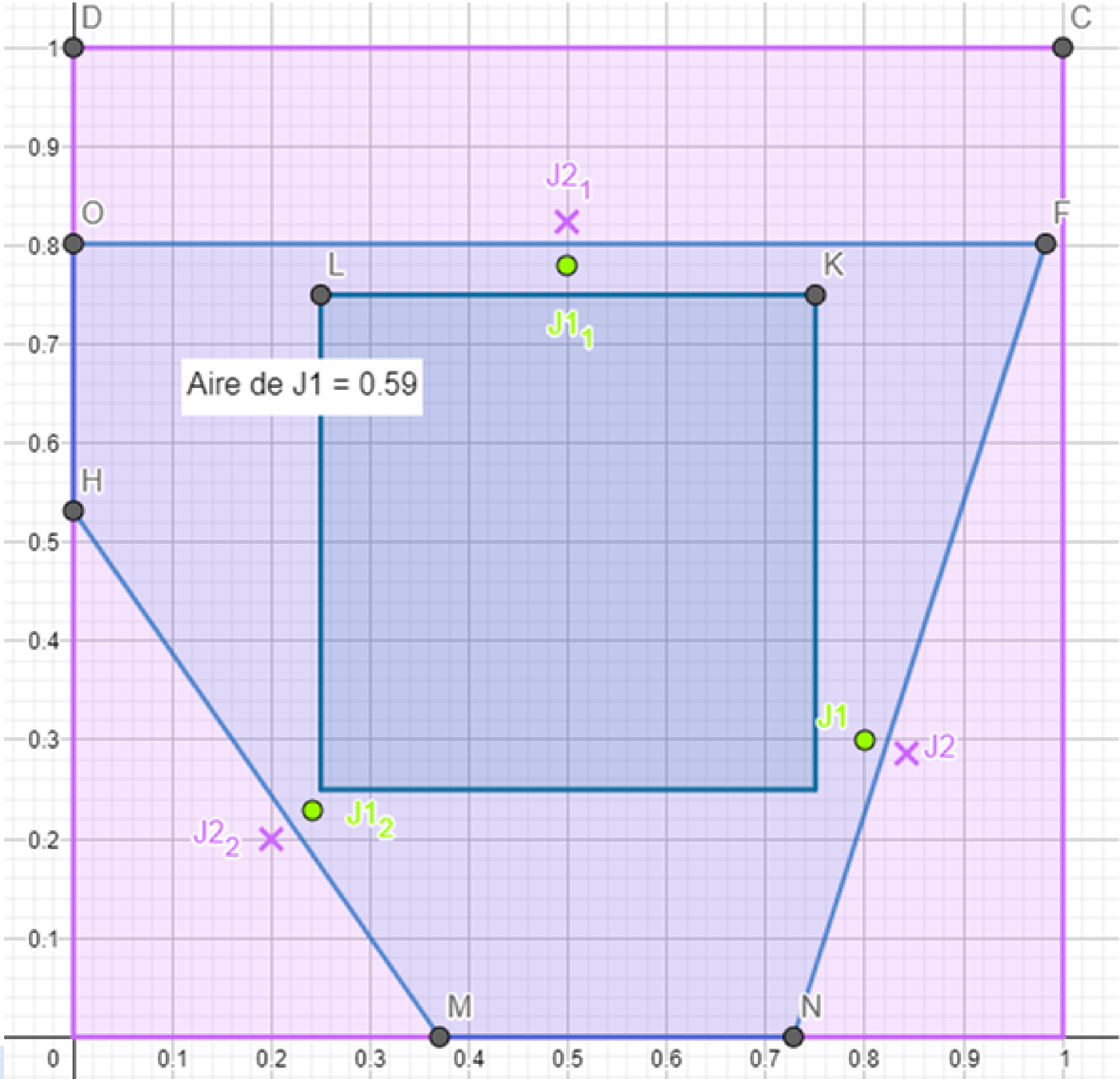
- 1er cas:
- J2 joue STICTEMENT dans C_2
- On « bloque » J2 vers le centre



Le jeu en 2D

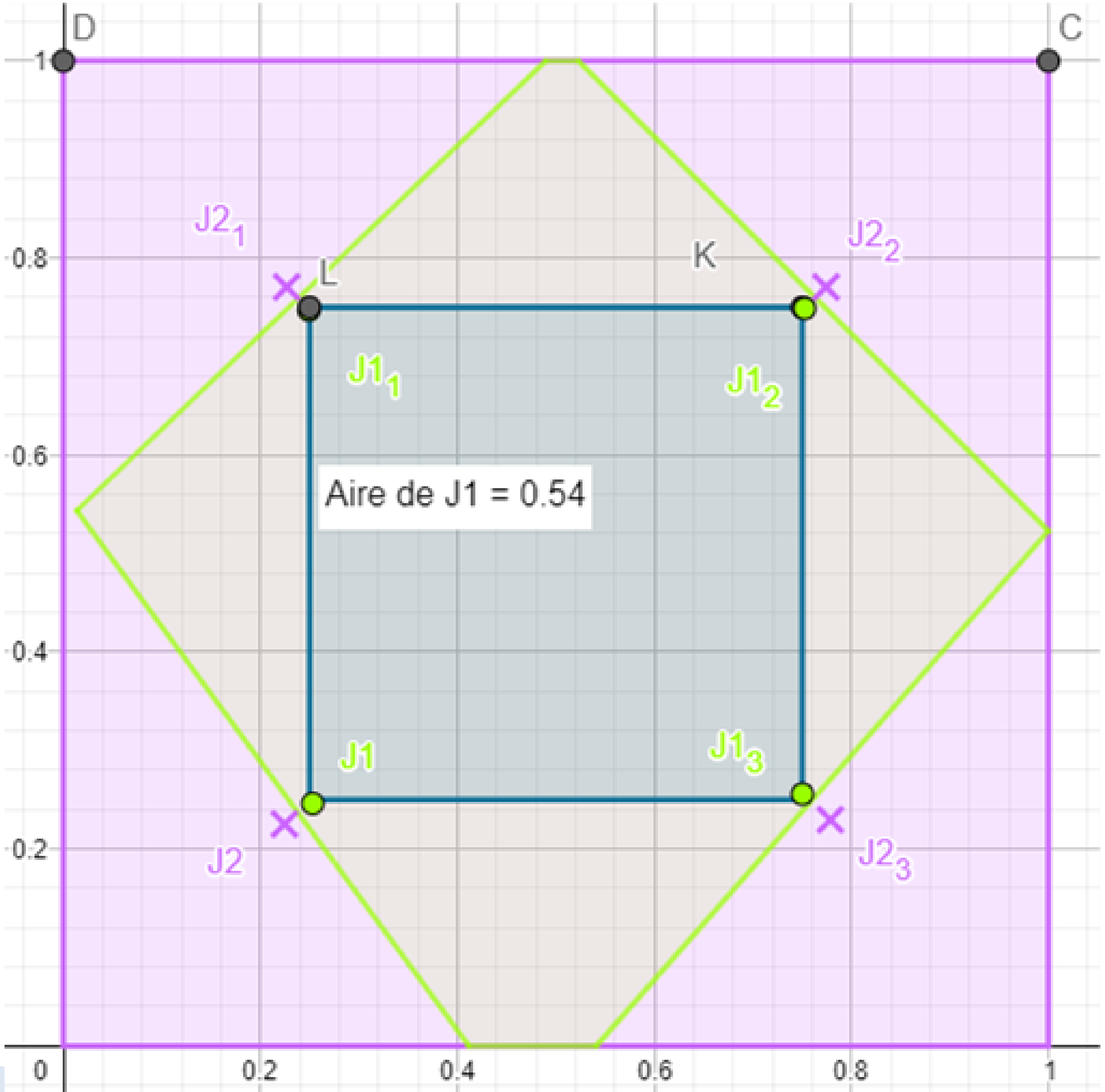
- 2eme cas:
- J2 joue STRICTEMENT en dehors de C_2
- On « bloque » J2 dans les coins.

Ces 2 techniques marchent pour n'importe quel nombre de coups c>2.



Le jeu en 2D

- Pour c=4:
- Jouons sur les 4 coins de C_2



Conclusion

- Sur un segment, le joueur 2 peut toujours gagner sauf pour c=1.

- Dans un carré, il n’y a pas de stratégie gagnante pour aucun des deux joueurs.

- Idées de recherches futures :
- Augmenter le nombre de joueurs
- Jouer dans des polygones réguliers ou un cercle
- Créer un jeu dans un cube puis généralisation à n dimensions

Participants

- Tiphaine BAUDOIN de 1eS2
- Louane GREE de 1eS2
- Elora JIBRAYEL de 1eS4
- Paul LECOMTE de TermS3
- Lucas TACHEN MIGHELI de TermS