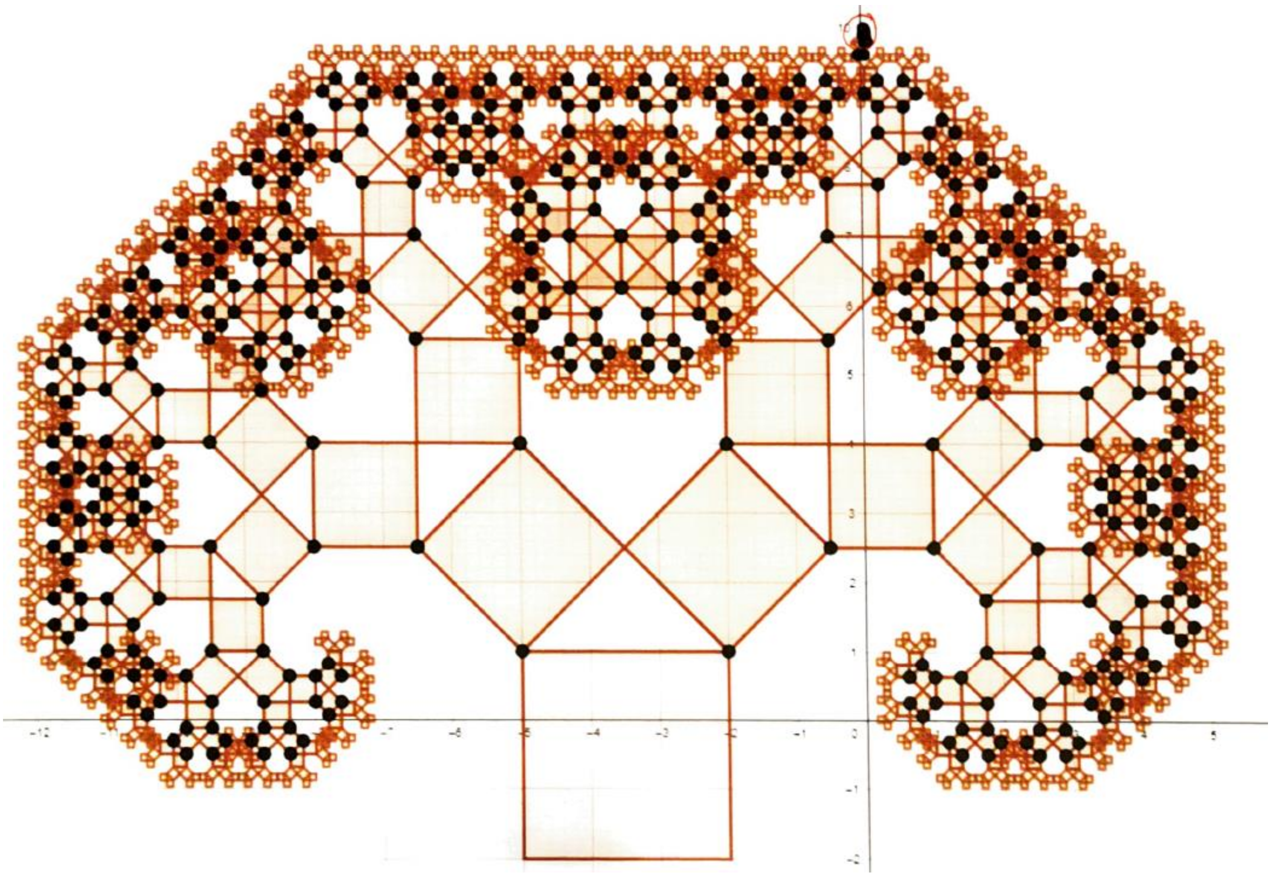
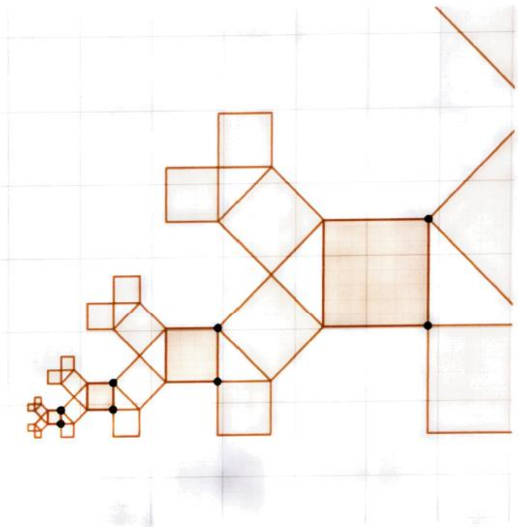
## Solution énigme 5 :

C'est **Camille Malbrancke**, une élève de seconde qui nous a impressionnée avec sa réalisation sur geogebra, qu'elle semble maîtriser de main de maître !

On peut y voir cette jolie figure fractale qui porte bien son nom d'arbre de Pythagore. Elle semble avoir bien compris l'invariance d'échelle d'une telle figure puisqu'elle nous a même joint un détail de la figure : En zoomant sur la petite partie entourée en rouge, on obtient le second dessin qui ressemble à s'y méprendre à une partie du premier !

Elle a également su calculer les dimensions et l'aire de cette figure (à l'étape 10). Bravo à elle pour sa perspicacité et sa persévérance !





Nous félicitons **François Ilyes** pour ses bonne idées et ses méthodes rigoureuses utilisant les suites géométriques, les formules de sommes de termes et les passages à la limites malgré certaines erreurs. Voici le début de sa solution :

1) On souhaite calculer la longueur des carrés en fonction en fonction des étapes, on appellera donc $(u_n)$ la suite qui permet de calculer la longueur des côtés du carré à la n-ième étape.

-Pour calculer $u_{n+1}$ on utilise la trigonométrie, on a donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

On vient donc de déterminer la raison q de la suite $(u_n)$ qui est égale à : $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Le premier terme de la suite $(u_n)$ est un réel positif a, ainsi la suite $(u_n)$ est de terme général :

$$u_n=a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

-On constate que pour calculer la hauteur on a la somme suivante :

$S = 2u_0+2u_1+2u_2+\ldots+2u_k$

Ce qui nous donnes :

$$S=2\sum(u_k)$$

D'après la relation on a :

S est la hauteur de la figure, vous l'aviez compris !

Ici, **Ilyes** a eu la bonne idée de compter les carrés par 2 car chaque côté d'un carré est égal à la diagonale du carré suivant. Cependant il faut rectifier les indices : $S = 2U_0 + 2U_2 + \cdots + 2\,U_{2k}$ mais attention ce serait pour l'étape $2k + 1$

En effet, il faudrait différencier le cas où le nombre d'étapes est pair ou impair....

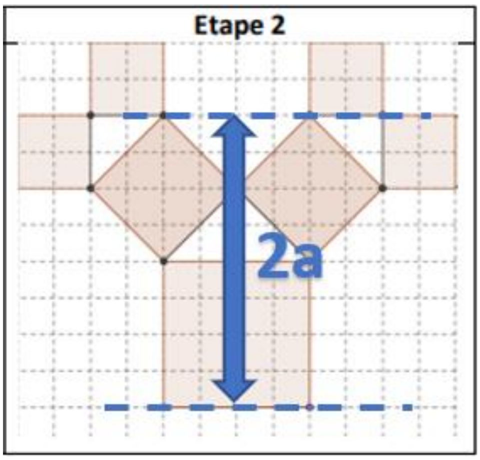
Pour le cas de l'étape 10, on additionne 11 longueurs :

$$S = 2U_0 + 2U_2 + 2U_4 + 2U_6 + 2U_8 + U_{10}$$

$$S = 2a + 2a\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cdots + 2a\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8 + a\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}$$

$$S = \left(2a + a + \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8}\right) + \frac{a}{32}$$

$$\boxed{\boldsymbol{S = \frac{125}{32}a}}$$



Le calcul de l’aire n’est pas traité sur la copie rendue.

Si on ne prend pas en compte le fait que certains carrés se chevauchent,( ce qui complexifierait encore les calculs !)

$$A = U_0^2 + 2\,U_1^2 + 4U_2^2 + 8\,U_3^2 \dots + 2^{10}U_{10}{}^2$$

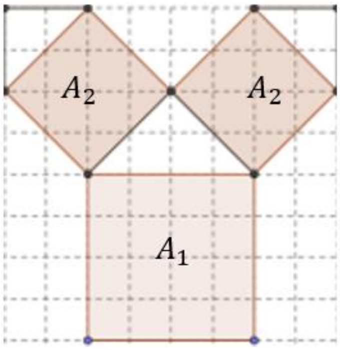
$$A = a^2 + 2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\frac{a}{\sqrt{2}^2}\right)^2 + 8\left(\frac{a}{\sqrt{2}^3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a}{\sqrt{2}^{10}}\right)^2$$

$$A = a^2\left(1 + 2\frac{1}{\sqrt{2}^2} + 2^2\frac{1}{\sqrt{2}^4} + 2^3\frac{1}{\sqrt{2}^6} + \dots + 2^{10}\frac{1}{\sqrt{2}^{20}}\right)$$

$$A = a^2\left(1 + 2\frac{1}{2} + 2^2\frac{1}{2^2} + 2^3\frac{1}{2^3} + \dots + 2^{10}\frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$A = a^2(1 + \dots + 1)$$

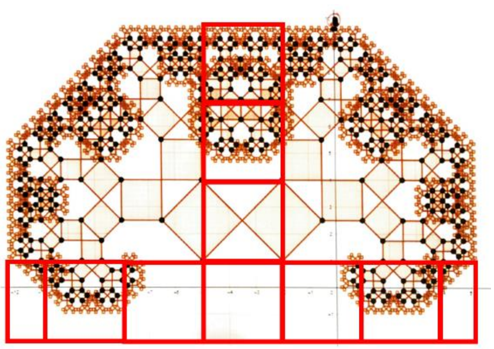
$$\boxed{\boldsymbol{A = 11\,a^2}}$$




Ce calcul bien long m’aurait pu être évité par la remarque **d’Ilyes** « *la somme des aire des deux petits carrés formés sur le grand, est égal à l’aire de celui qui est situé dessous* »

C’est-à-dire que $A_2 + A_2 = A_1$ grâce à Pythagore !

2) Pour ce qui est de la taille de la feuille, la figure de **Camille Malbrancke** permet de conjecturer la <u>largeur de l’arbre de l’ordre de 6 $a$ et la hauteur de l’ordre de 4 $a$</u>... Pour le montrer on peut utiliser la somme des termes d’une suite géométrique travaillée en classe de première... Par exemple pour la hauteur :



$$S_n = \left(2a + a + \frac{a}{2} + \dots + \frac{a}{2^n}\right) + \frac{a}{2^{n+2}}$$

$$S_n = 2a\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{1-\frac{1}{2}}\right) + \frac{a}{2^{n+2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 2a\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \boxed{4a}$$

Suivant si on est à une étape paire ou pas, il faudra ajouter ce terme, sa limite tend vers 0 lorsque n tend vers l’infini donc cela ne changera pas la limite...

Il reste enfin a choisir le côté $a$ du carré initial tel que <u>$4a < 21$ et $6a < 29{,}7$</u>

soit $a < 5{,}25$ et $a < 7{,}425$ donc $\boxed{a < 5{,}25}$