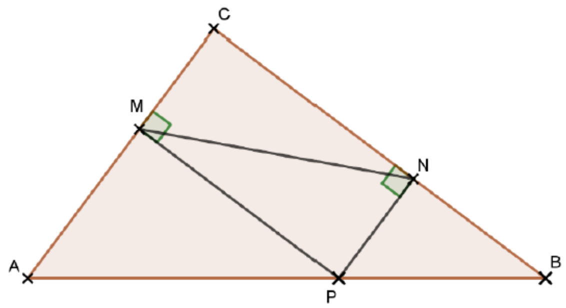
Solution énigme 3 :

Enigme 3 :

Robinson se retrouve échoué sur une île qui a la forme d'un triangle dont les côtés mesurent 3, 4 et 5 km.

Il veut établir son camp de base en P, quelque part sur la plage $[AB]$. Tous les jours, il compte se rendre sur les deux autres plages en empruntant des chemins $[PM]$ et $[PN]$ perpendiculaires aux rivages, comme indiqué sur la figure 1.
Il voudrait que le trajet qui lui permet d'aller de M jusqu'à N soit le plus court possible.



Bravo à **François Ilyes**, élève de première, pour sa solution experte qui démontre une grande maîtrise des outils mathématiques qu'il vient de découvrir en première ! En effet, pour minimiser la distance MN, il l'a exprimé en fonction de x (la distance AM), puis il a calculé la dérivée de cette fonction pour déterminer son minimum. C'est une technique très utilisée en mathématique, qu'il semble déjà maîtriser à la perfection !
Merci également à **Benjamin Vergnaud** pour sa participation remarquée sur cette énigme également !

La solution de François Ilyes :

On appellera x la longueur du côté AP.

-On souhaite dans un premier lieu déterminer la distance PN, on sait que dans le triangle PNB, que la longueur PB est égale à : 5-x
NB et PN sont inconnus, on va donc utiliser le théorème de Thalès, ainsi d'après le théorème de Thalès on a :

$\frac{AC}{PN}=\frac{CB}{NB}$;On sait que que : $\cos(ABC)=\frac{4}{5}$; $\cos(ABC)=\frac{NB}{PB}$;
On souhaite calculer NB, ce qui nous donne :
$NB=\frac{4}{5}*PB=\frac{4}{5}*(5-x)$

D'après le théorème de Thalès :

$$PN=\frac{AC*NB}{CB}=\frac{3}{4}*NB=\frac{3}{5}(5-x)$$

On va calculer maintenant MP, on utilise la même méthode c'est à dire la trigonométrie et le théorème de Thalès, d'après le théorème de Thalès :

$\frac{CB}{MP}=\frac{AC}{AM}$ et d'après la trigonométrie :

$\cos(CAB)=\frac{3}{5}$; $\cos(CAB)=\frac{AM}{AP} \Leftrightarrow AM=AP*\cos(CAB)$

D'après le théorème de Thalès :

$MP=\frac{CB*AM}{AC}$; $MP=\frac{4}{3}*AM$ $sachant\ que: AM=\frac{3}{5}x$; $MP=\frac{4}{5}x$

Maintenant on calcule la distance MN, d'après le théorème de Pythagore :

$$MN^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2 x^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2 (x-5)^2$$

$$MN^2=\frac{1}{25}(25x^2-90x+225)$$

$$MN^2=\frac{1}{5}(5x^2-18x+45)$$

$$MN=\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{5x^2-18x+45}=\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{5\left(x^2-\frac{18}{5}+9\right)}=\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{5\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\frac{144}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{\frac{(5x-9)^2}{5}+\frac{144}{5}}$$

$$MN=\frac{1}{5}\sqrt{(5x-9)^2+144}$$

On appellera donc la fonction f défini tel que f:x $\rightarrow \frac{1}{5}\sqrt{(5x-9)^2+144}$ défini sur R

On souhaite donc étudier les variations de f, la fonction f est le produit d'un constante et de la fonction composée d'une racine carré et d'un polynôme.
Ainsi on a la dérivée suivante :

$$f'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\frac{10(5x-9)}{10\sqrt{(5x-9)^2+144}}=\frac{(5x-9)}{\sqrt{(5x-9)^2+144}}$$

On résout l'équation : f' = 0 sur R

$$f'=0 \Leftrightarrow 5x-9=0 \Leftrightarrow x=\frac{9}{5}$$

La fonction f' est un quotient, son dénominateur est strictement positif et ne s'annule pas et son numérateur est supérieur à 0 sur l'ensemble :$\left[\frac{9}{5};+\infty\right[$

On a donc le tableau de variation :

x	-∞	$\frac{9}{5}$	+∞
f'(x)	-		+
f(x)	↘	$\frac{12}{5}$	↗

Notre intervalle d'étude est [0;5]
donc on :

x	0	$\frac{9}{5}$	5
f'(x)	-		+
f(x)	3 ↘	$\frac{12}{5}$	↗ 4

On a donc trouver le minimum de la fonction f, ainsi la distance MN est minimale lorsque la distance AP vaut 1,8km, MN est donc de 2,4 km.