Solution énigme 2 :

Un avion contient n places et n passagers se tiennent prêts à embarquer.
Chaque passager a un billet en main avec son numéro de place.
Les passagers embarquent par ordre croissant de leur numéro de places.
Le premier passager à embarquer ne tient pas compte de son numéro de place et s'assoit au hasard sur l'une des n places libres de l'avion.
Les autres passagers, plus disciplinés, occupent la place qui leur a été attribuée, si celle-ci est libre. Si cette place est déjà occupée, ils occupent alors au hasard l'une des places restantes.

Quelle est la probabilité que la dernière personne occupe la place qui lui était attribuée ?

On pourra commencer par envisager les cas où l'avion contient seulement 3 places puis 4 places.

Bravo à **Bjorn Lai,** élève de terminale qui nous a impressionné en fournissant un algorithme qui simule le remplissage de l'avion dans les conditions indiquées et calcule la fréquence avec laquelle le dernier passager s'assoit à la bonne place.

Cette simulation ne constitue pas une preuve mathématiques, mais permet de faire une conjecture efficace !

```python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Tue Mar 14 13:36:51 2023

@author: bjorn
"""

import random

def simulation(n):
    """
    Prend en paramètre un entier n et simule l'entrée de n p
    renvoie True si le dernier passager est installé à sa pl
    """
    assert type(n) == int
    assert n >= 2

    passagers = [i for i in range(n)]
    places = {i : None for i in range(n)}

    places_restantes = [i for i in range(n)]

    passager_1 = passagers.pop()
    place_choisie = random.choice(places_restantes)

    places[place_choisie] = passager_1
    places_restantes.remove(place_choisie)

    while len(passagers) > 1:

        p = passagers.pop()
        if places[p] is None:
            places[p] = p
            places_restantes.remove(p)
        else:
            place_choisie = random.choice(places_restantes)
            places[place_choisie] = p
            places_restantes.remove(place_choisie)

    return places[0] is None


def simulations_multiples(n, m):
    """Répète m fois une simulation de n passagers"""
    X = 0
    for i in range(m):
        if simulation(n):
```

```python
def simulations_multiples(n, m):
    """Répète m fois une simulation de n
    X = 0
    for i in range(m):
        if simulation(n):
            X += 1

    p = X/m
    print("Sur {0} simulations de {1} pa
    return p



simulations_multiples(2, 2000)
print()
simulations_multiples(3, 2000)
print()
simulations_multiples(4, 2000)
print()
simulations_multiples(30, 2000)
print()
simulations_multiples(50, 2000)
```

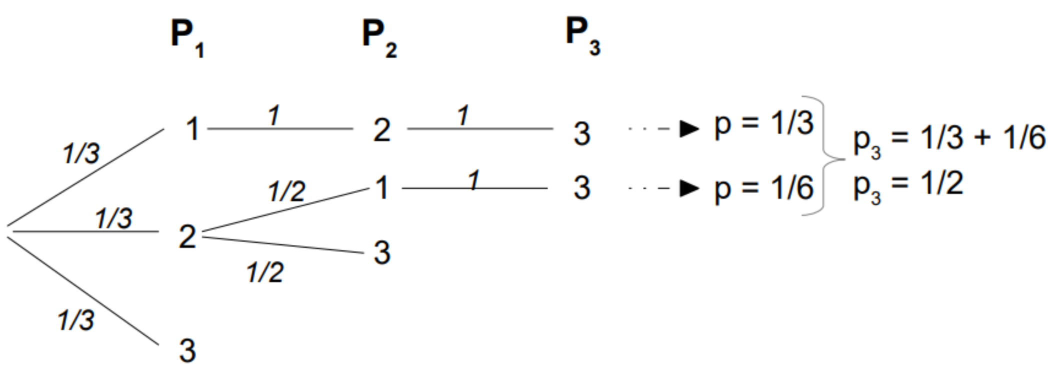
Ce qui donne après exécution …

```
=========== RESTART: C:\Users\floje\Downloads\enigme_2_avion_v2.py ===========
Sur 2000 simulations de 2 passagers dans un avion de 2 places, le dernier passag
er est assis à sa place dans 51.800000000000004% des cas

Sur 2000 simulations de 3 passagers dans un avion de 3 places, le dernier passag
er est assis à sa place dans 50.649999999999999% des cas

Sur 2000 simulations de 4 passagers dans un avion de 4 places, le dernier passag
er est assis à sa place dans 50.5% des cas

Sur 2000 simulations de 30 passagers dans un avion de 30 places, le dernier pass
ager est assis à sa place dans 49.8% des cas

Sur 2000 simulations de 50 passagers dans un avion de 50 places, le dernier pass
ager est assis à sa place dans 50.05% des cas
>>> |
```

Il semble donc que la probabilité pour que le dernier passager s'assoit à sa place soit de $\frac{1}{2}$, et que cela ne dépende pas du nombre de passagers !

Et bravo aussi à **Nina Boyer et Julien Sotoca-Ferrata**, élèves de terminale, pour leurs efforts considérables pour appréhender cette situation beaucoup moins évidente qu'il n'y parait ! Ils nous permettent de bien voir ce qui se passe jusqu'à 4 passagers, et entament une démonstration du cas général :

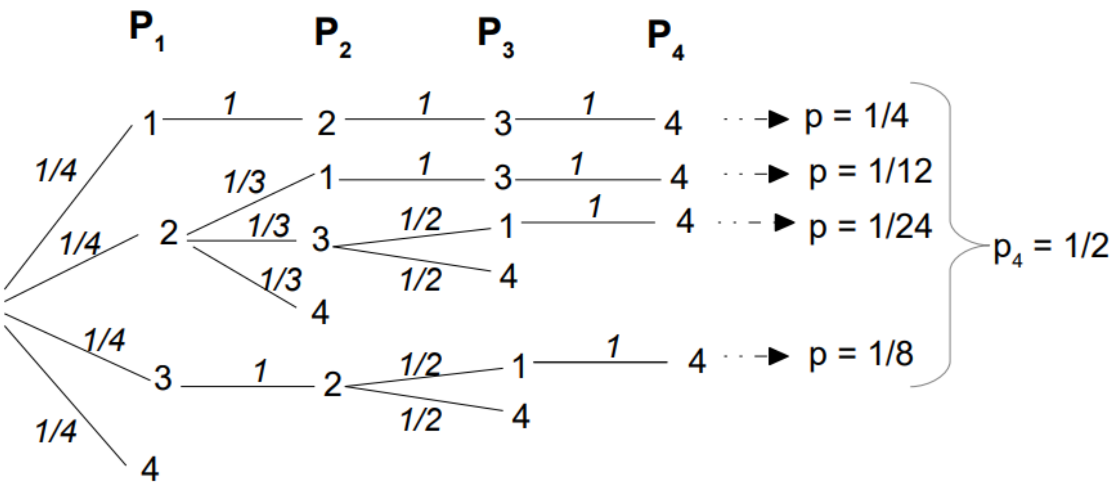
Commençons donc par envisager un tout petit avion de 3 places. Le premier passager à s'asseoir est notre passager indiscipliné, noté $\mathbf{P_1}$. Il s'assoit au hasard sur une des trois places libres : il a donc une chance sur trois de s'asseoir à la place n°1, une chance sur trois de s'asseoir à la place n°2 et une chance sur trois de s'asseoir à la place n°3. Ensuite, le passager $\mathbf{P_2}$ monte à son tour dans l'avion. Si la place n°2 est libre, il s'y assoit. Sinon, c'est-à-dire dans le cas où $\mathbf{P_1}$ occupe la place n°2, $\mathbf{P_2}$ s'assoit au hasard à la place n°1 ou à la place n°3, et $\mathbf{P_3}$ prend la place restante. On modélise la situation par l'arbre suivant :



(pour des raisons de clarté et de lisibilité, on ne continue pas les branches "inutiles" à la résolution de notre problème, celles qui se poursuivent après qu'un passager se soit assis à la place n°3)

La probabilité, notée p_3, que $\mathbf{P_3}$ soit assis à sa place dans cet avion est donc égale à **1/2**.

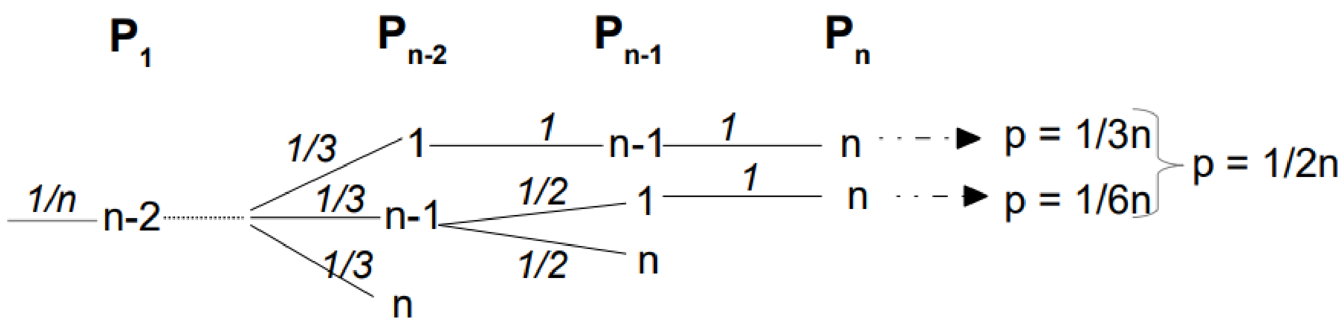
Imaginons maintenant un avion un peu plus grand, qui comporte 4 places. L'arbre représentant cette situation est le suivant :



La probabilité, notée p_4, que le passager $\mathbf{P_4}$ soit assis à la place n°4 vaut ici **1/2**.

A partir de ces exemples, on peut émettre plusieurs remarques et conjectures :

- Si $\mathbf{P_1}$ s'assoit à sa place (n°1), ce qui a une chance sur n de se produire, chacun va occuper la bonne place, et tout ira bien.
- Si $\mathbf{P_1}$ s'assoit à la place n°n, ce qui a également une chance sur n de se produire, $\mathbf{P_n}$ n'aura absolument aucune chance d'occuper la place n°n, puisqu'elle est déjà prise. On peut donc déjà déterminer que p_n vaut au minimum 1/n, et au maximum 1 – 1/n = (n-1) / n .
- De plus, si $\mathbf{P_1}$ s'assoit à la place n°(n-1), $\mathbf{P_2}$ va s'asseoir à sa place, $\mathbf{P_3}$ aussi, et tous les autres également jusqu'à $\mathbf{P_{n-1}}$, qui va occuper au hasard ou bien la place n°1, et tout s'arrange, ou bien la place n°n, et tout est perdu. Dans ce cas, la probabilité que $\mathbf{P_n}$ soit assis à la place n vaut donc 1/n * 1/2 = 1/2n [probabilité que $\mathbf{P_1}$ s'asseye à la place n°(n-1) multipliée par la probabilité que $\mathbf{P_{n-1}}$ s'asseye à la place n°1]. Si $\mathbf{P_1}$ occupe la place n°(n-2), on a :



On conjecture que, au niveau $\mathbf{P_1}$, tous les chemins menant au succès <u>à part celui où $\mathbf{P_1}$ s'assoit à la place n°1</u> ont une probabilité de 1/2. Cela fait donc n-2 chemins : au niveau $\mathbf{P_1}$, il y a n chemins, mais celui où $\mathbf{P_1}$ occupe la place n°1 a une probabilité de mener au succès égale à 1, et celui où $\mathbf{P_1}$ occupe la place n°n a une probabilité de mener au succès égale à 0. On aurait alors (n-2) chances sur n d'emprunter un chemin de probabilité de succès égale à 1/2, plus une chance sur n d'emprunter le chemin qui a une probabilité de succès valant 1. Et donc on aurait p_n = (n-2)/n * 1/2 + 1/n

= (n-2) / (2n) + 1/n

= n / (2n) – 2 / (2n) + 1/n

= 1/2 – 1/n + 1/n

et donc $\boxed{p_n = 1/2}$.

Il faudrait donc seulement démontrer notre conjecture selon laquelle tous les (n-2) chemins partant du niveau $\mathbf{P_1}$, et traduisant les situations où $\mathbf{P_1}$ ne s'assoit ni à la place n°1, ni à la place n°n, ont une probabilité de mener le passager $\mathbf{P_n}$ à la place n°n égale à 1 / (2n).

<u>Remarque des correcteurs :</u>

L'idée est bien là, mais il faudrait démontrer cette conjecture !

Voici une manière d'appréhender le problème :

Il faut déjà avoir compris, comme l'évoque nina dans sa solution que seule deux possibilités existent pour le dernier passager : Soit il occupe son siège, le n°n, soit il occupe le siège n°1.

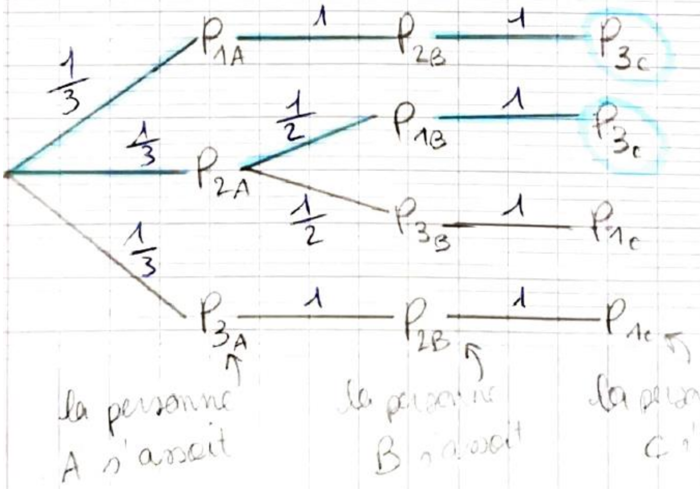
Nous allons montrer que les deux situations précédentes sont équiprobables :

On considère la dernière personne ayant dû choisir sa place au hasard. Notons k son numéro de billet.
Il y avait alors n-k + 1 places disponibles. Parmi celles-ci on peut différencier :
- Les n-k-1 places de ceux qui arrivent ensuite avant le dernier (car chacun d'entre eux s'assied à sa place).
- Celle du premier (car si elle avait été prise tout le monde aurait eu sa place ensuite).
- Celle du dernier (idem).
Le k-ième passager n'a pas choisi une des n-k-1 places de ceux qui arrivent après lui et avant le dernier, car ceux-là se sont tous assis à leur place. Il lui reste comme choix la place du 1er ou celle du dernier.
Choisissant sa place de manière aléatoire, chacune de ces issues a pour probabilité ½.
Or, si ce k-ième passager s'assoit à la place n°1, le dernier s'assiéra à la place n°n et réciproquement.
Ainsi, les deux situations sont équiprobables et la probabilité que le dernier passager s'asseye à sa place est de ½.

Merci également à Fiona Mari et Constance Rodet, élèves de première, pour avoir résolu brillamment le problème dans le cas de 3 passagers, ce qui permet de commencer à comprendre ce qui va se passer …

On envisage le cas où l'avion contient 3 passagers, A, B et C s'asseyant aux places 1, 2 et 3. Soient les évènements P_1 "s'assoir à la place n°1", P_2 "s'assoir à la place n°2" et P_3 "s'assoir à la place n°3", en ajoutant la lettre de la personne qui s'assoit.

On fait un arbre de probabilités :



"P_{1A}" signifie donc que la personne A s'assoit à la place n°1.

On remarque que seul la place de la personne A est aléatoire (comme indiqué dans l'énoncé). En effet, si celle-ci s'assoit à sa place par hasard, la personne B ira forcément à sa place et idem pour la personne C (1ère ligne de l'arbre).
Quand leur place est disponible, les personnes B et C vont forcément s'assoir au bon endroit.
On cherche $p(P_{3C})$ la probabilité de l'évènement "la personne C s'assoit sur la place 3", soit sa bonne place.
Les branches aboutissant à ce résultat sont :

$P_{1A} \cap P_{2B} \cap P_{3C}$

et $P_{2A} \cap P_{1B} \cap P_{3C}$.

D'où $p(P_{3C}) = p(P_{1A}) \times p(P_{2B}) \times p(P_{3C}) + p(P_{2A}) \times p(P_{1B}) \times p(P_{3C})$

$$= \frac{1}{3} \times 1 \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Pour 3 passagers, la probabilité que la personne C s'assoit à sa place (n°3) est de $\frac{1}{2}$.