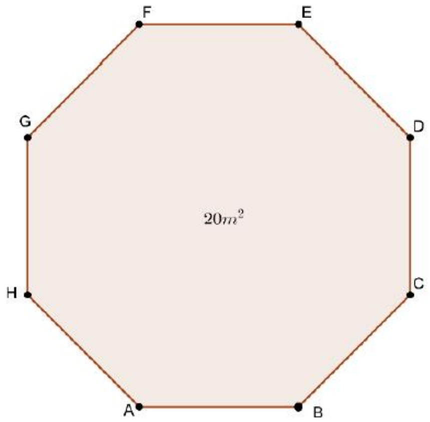
Solution énigme 1 :

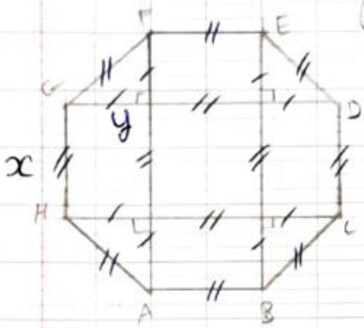
Mehdi construit des cabanes dans les arbres. Pour son prochain projet, il doit construire une plateforme ayant la forme d'un octogone régulier de 20 m². Cette plateforme sera entourée d'une rambarde.

Quelle longueur de rambarde doit-il prévoir ?



Bravo à **Fiona Mari** et **Constance Rodet**, élèves de première, pour leur solution originale et très bien rédigée, C'est celle que nous avons préféré !

Énigme 1 :



On appelle x la longueur d'un côté de l'octogone régulier et y le côté d'un triangle rectangle isocèle avec x comme hypothénuse.

On a donc $x^2 = 2y^2$.

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}\,y$

On cherche à exprimer l'aire de cette figure en fonction de x et y.

Elle est composée d'un carré de côté x, de quatre rectangles d'aire xy et de quatre triangles rectangles qui ensemble forment deux carrés de côté y.

$A = x^2 + 4xy + 2y^2 = 20$

Soit selon l'égalité vue plus haut :

$A = x^2 + 4xy + x^2 = 20$

$\Leftrightarrow A = 2x^2 + 4xy = 20$

On a un système de deux équations :

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy = 20 \\ x = \sqrt{2}\,y \end{cases}$$

On remplace x par $\sqrt{2}\,y$ dans la première équation :

$$2(\sqrt{2}\,y)^2 + 4(\sqrt{2}\,y)y = 20$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 + 4\sqrt{2}\,y^2 = 20$$

$$\Leftrightarrow y^2 + \sqrt{2}\,y^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow y^2(1+\sqrt{2}) = 5$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{5}{1+\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = \sqrt{\frac{5}{1+\sqrt{2}}} \simeq 1{,}43912 \text{ m}}$$

Donc

$$x = \sqrt{2}\,y$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\frac{5}{1+\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} \simeq 2{,}03522 \text{ m}}$$

D'où P le périmètre de l'octogone régulier :

$$P = 8x$$

$$P = \frac{8\sqrt{10}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{P \simeq 16{,}28179 \text{ m}}$$

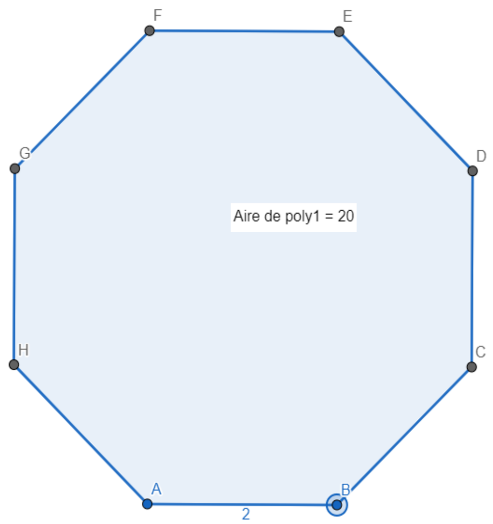
Bravo également à **Bjorn Lai**, pour sa solution élégante et particulièrement bien présentée, basée sur la trigonométrie. **François Ilyes** et **Nina Boyer** avaient à peu près la même solution, également très bien présentée. D'autres solutions correctes ont également été proposées par **Benjamin Vergnaud**, ainsi que par **Mathieu Collegia et Téo Ben Mohamed**, nous les félicitons également. Cependant, ces solutions utilisaient une formule « toute faite », c'est pourquoi nous avons préféré les deux solutions présentées.

La solution proposée par Bjorn Lai, élève de terminale :

• Le problème revient à trouver le périmètre de l'octogone.

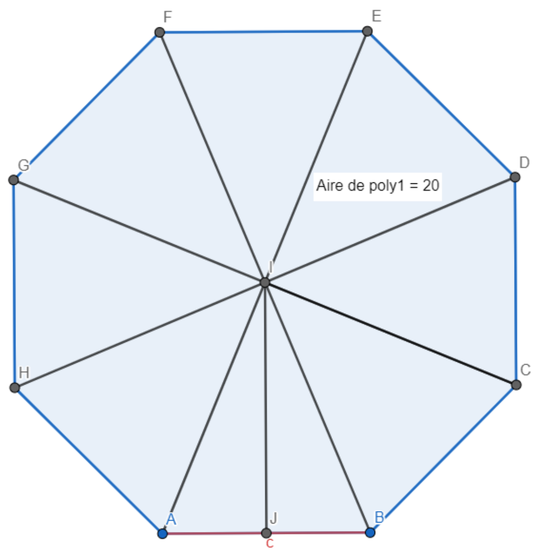
Conjecture :

• À l'aide d'un logiciel de géométrie, on conjecture la longueur d'un côté de l'octogone. Il semblerait que la longueur AB mesure 2 mètres. On aurait donc P = 2 × 8 = 16 m



Démonstration :

• On constate qu'il est possible de décomposer l'octogone en huit triangles isocèles égaux. On note c la longueur d'un côté de l'octogone.



On a$A_{ABI} = \frac{c \times h}{2}$

• Calculons la mesure de l'angle $\widehat{IAB}$

$$\widehat{IAB} = \frac{180 - \widehat{AIB}}{2} = \frac{180 - (360/8)}{2} = \frac{180 - 45}{2} = \frac{135}{2} = 67{,}5°$$

• Exprimons h en fonction de c

$$\tan(\widehat{IAB}) = \frac{IJ}{AJ} \Leftrightarrow \tan(67{,}5°) = \frac{IJ}{0{,}5c} \Leftrightarrow IJ = \tan(67{,}5°) \times \frac{1}{2}c \approx 1{,}207c$$

• Calculons l'aire du triangle ABI

On sait que l'aire de l'octogone est de 20m²

Donc $A_{ABI} = \frac{20}{8} = 2{,}5m^2$

• On a donc

$$A_{ABI} = \frac{AB \times IJ}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2{,}5 = \frac{c \times \tan(67{,}5°) \times 0{,}5c}{2}$$

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{10}{\tan(67{,}5°)}$$

$$\Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{10}{\tan(67{,}5°)}} = \sqrt{-10 + 10\sqrt{2}} \approx 2{,}035m$$

Donc $P = 8 \times c = 8 \times \sqrt{-10 + 10\sqrt{2}} \approx 16{,}28m$

Mehdi devra donc prévoir une longueur de 16,28 m pour la rambarde.