ECG2 : RENTREE 2023

ANGLAIS

Bonjour à tous, afin que la rentrée se fasse le plus sereinement possible, voici quelques indications. Si vous avez des questions, notamment pour les choses à absolument mettre en place pendant l'été (point numéro ❶), vous pouvez me contacter par email : eaurambault@gmail.com

❶ LES OUTILS INDISPENSABLES POUR LA RENTREE

Afin d'entrainer efficacement votre mémoire tout au long de l'année, nous travaillerons avec le logiciel «**Anki** », qui signifie « mémorisation » en japonais, et qui permet ***d'apprendre et de réviser*** quotidiennement des ***cartes-mémoire*** grâce à la ***répétition espacée***.

Pour cela, **vous devez télécharger Anki** ici : https://apps.ankiweb.net/

Vous pouvez l'installer sur votre **ordinateur** et/ou votre **téléphone**, ce qui est pratique pour réviser dès que l'occasion se présente. Seul bémol, l'application sur iPhone est payante (une trentaine d'euros). A vous de voir si cet investissement est nécessaire. Vous pourrez toujours travailler en ligne et sur ordinateur **gratuitement** (l'appli sur Android est gratuite).

Vous devrez aussi vous créer un **compte en ligne sur AnkiWeb** afin de synchroniser vos données sur tous vos appareils : https://ankiweb.net/account/register

Je vous fournirai certaines des ***cartes-mémoire*** à importer dans le logiciel tout au long de l'année en fonction de nos avancées dans le programme. Vous pourrez aussi créer les vôtres en fonction de vos besoins. Vous pouvez aussi télécharger des paquets de cartes « tout prêts » et disponibles en ligne en anglais mais aussi dans toutes les autres matières.

Pour prendre en main le logiciel AVANT la rentrée :

- **Tutos de deux professeurs** qui vous expliquent très clairement et pas à pas le principe du logiciel pour créer vos propres cartes, entrainer votre mémoire et synchroniser votre compte.

https://www.youtube.com/watch?v=w5_1xeyWQeA

https://www.youtube.com/watch?v=BNDgxzIgARE

- **Tuto d'un élève de prépa, très enthousiaste** !

https://riche-de-temps.fr/anki-francais/

- **Le manuel utilisateur**, très complet : https://apps.ankiweb.net/docs/manual.fr.html

Pour ceux et celles d'entre vous qui utilisent "**Quizlet**" (système similaire à Anki mais moins efficace sur le processus de mémorisation à long terme), vous pouvez, si vous le souhaitez, importer vos paquets Quizlet dans Anki pour tout avoir au même endroit. Le tuto est là : https://greencoin.life/how-to/convert/quizlet-to-anki/

Vous pouvez commencer par importer un paquet de cartes tout prêt en ligne comme ***les verbes irréguliers*** par exemple et commencer à les revoir pour la rentrée.

Si vous avez des questions : eaurambault@gmail.com

❷ LES HABITUDES A NE PAS PERDRE PENDANT L'ETE

Vous le savez, le support principal pour les différentes épreuves des concours, à l'écrit comme à l'oral, est la presse. Pensez donc à **lire la presse** cet été … Voici une liste non exhaustive des principaux journaux ou magazines et de leurs sites internet :

- *The Guardian* www.theguardian.com/international (Site entièrement gratuit et ressource principale pour les sujets de concours)
- *The Financial Times* https://www.ft.com/ (Accès gratuit à un certain nombre d'articles ; privilégiez les articles de la section « Opinion » : https://www.ft.com/opinion)
- BBC News https://www.bbc.com/news
- *The Economist* www.economist.com (Accès gratuit à un certain nombre d'articles).
- *The New York Times* www.nytimes.com (De très bons articles, calibrés pour le concours, dans la section "Opinion" notamment – accès gratuit à un certain nombre d'articles par mois)
- https://slate.com/
- *The Wall Street Journal* www.wsj.com
- CNN news website http://edition.cnn.com

Je suis certaine que vous saurez aussi allier plaisir et travail en regardant vos **séries** préférées en VO ou en écoutant de la **musique**, voilà deux sites qui vous permettront de le faire :
https://fr.lyricstraining.com/en/
https://www.esolcourses.com/topics/learn-english-with-songs.html

D'autres sites qui proposent des ressources intéressantes :

1. Pour trouver des **informations sur des thèmes variés** en anglais :

News in Levels : Différents articles et vidéos sur des sujets d'actualité variés, et avec différents niveaux de difficulté – http://www.newsinlevels.com/

2. **Pour progresser au niveau de l'accent** :

- Pour comprendre les sons, une infographie audio et interactive : https://englishcpge.jimdofree.com/pronunciation/
- **Acapela** https://www.acapela-group.com/ – tapez et écoutez en choisissant un accent américain, britannique, etc.
- https://www.bbc.co.uk/learningenglish

Enfin, pour être efficace dès la rentrée et partir sur de bonnes bases, faites un bilan pour optimiser votre première année :

1. **Rangez** vos cours et textes de colle en fonction des thématiques/thèmes abordés.
2. **Centralisez** tous vos DS/DM et **créez des fiches récapitulatives** des erreurs à ne plus commettre (vous pouvez d'ailleurs commencer à vous créer des paquets de cartes dans Anki)
3. **Refaites** toutes les traductions travaillées en 1ère année (thèmes, versions, thèmes grammaticaux) pour créer des automatismes et fixer les structures.
4. **Relisez** les fiches « debriefing » des colleuses/colleurs et **faites une fiche spéciale pour les colles** où vous listez les erreurs à ne plus commettre au niveau de la grammaire, du lexique, de la prononciation, et de la méthode. **FIXEZ VOUS DES OBJECTIFS.**

See you soon !

Travail estival (ECG2 – Espagnol)

Chers étudiants,

Parce qu'il serait dommage de perdre tous les automatismes acquis durant votre première année de classe préparatoire, il vous faut fournir un travail rigoureux et approfondi durant l'été. Pour ce faire, vous devez consulter le Padlet de la classe qui contient tous les documents distribués durant l'année scolaire ainsi que des supports complémentaires. Vous devez, en outre, vous atteler aux tâches ci-dessous.

Pour la civilisation :

- Revoyez tous les dossiers de civilisation étudiés en classe, préparez des fiches récapitulatives.
- Ajoutez sur chacune de ces fiches, quelques mots-clé et au moins deux exemples (suffisamment contextualisés pour pouvoir les utiliser en EE / EO).

Pour la langue :

- Revoyez toutes les fiches de conjugaison, de grammaire et de vocabulaire. Révisez-les régulièrement pour consolider vos connaissances grammaticales. Vous devez maîtriser les listes de vocabulaire (1 à 13) pour pouvoir continuer d'enrichir votre bagage lexical en deuxième année.
- Remplissez le dossier de conjugaison qui vous a été remis avant les vacances.
- N'oubliez pas de travailler aussi votre langue française (accords et conjugaison) afin de gagner en rigueur en espagnol.
- Revoyez les traductions et entraînez-vous à l'aide du dernier thème grammatical.

Pour maintenir vos connaissances à jour :

- Baignez dans la culture hispanophone. Utilisez les listes de musiques, lectures, films, séries distribuées.
- Suivez les actualités : les sujets sont souvent choisis durant la pause estivale. (Vous avez à votre disposition, sur le Padlet, la liste des sites utiles).
- Vérifiez régulièrement le Padlet : J'ajouterai progressivement des CV, CE pour vous aider à suivre les principaux événements survenus dans l'aire hispanophone.

A la rentrée :

- Vous devrez apporter dès la reprise vos fiches (civi + langue) et le dossier de conjugaison.
- Une évaluation de thème grammatical aura lieu dès les premières séances afin de vérifier le travail effectué.

Je reste à votre écoute si des questions viennent à apparaître et vous souhaite à tous un bel été (ressourçant mais studieux !).

Adeline LEANDRE

CONSEILS DE TRAVAIL RENTREE 2023 ALLEMAND ECG 2° année

Bravo, vous êtes en ECG 2 allemand LV 1 et 2 ! Vous êtes des champions ! Mais dites vous bien : pas de victoire sans entraînement. Reposez vous pendant les vacances, mais travaillez aussi, pour rester ZEN en 2e année !

PREPARATION PENDANT LES VACANCES

VOCABULAIRE ET GRAMMAIRE

Il faut réviser tout ce que vous avez vu en première année CPGE. Le livre de grammaire suivant que vous connaissez contient règles et exercices corrigés et permet de travailler, en grammaire, vos points faibles *: Marhuenda (Marie) et Viselthier (Bernard). Fiches et Tests de Grammaire. Allemand. Parcours Université. Ophrys Grammaire (ISBN 9 782708 013322)* Travaillez sur votre livre de vocabulaire **:** *Scheuermann (Adelgard). Vocabulaire thématique Allemand-Français. Le monde d'aujourd'hui. Ellipses (ISBN 9 782729 838386)*

En septembre, revenez avec des connaissances solides et immédiatement disponibles, veillez à ne rien oublier. Une seule recette : des révisions quotidiennes pendant les vacances!

TRADUCTIONS

Je vous demande de travailler, pendant l'été, une 15e de traductions littéraires dans les livres suivants :
Lambert (Hélène) 100 % Thème Allemand. Ellipses (2013) ISBN 978-2-7298-77637.
Lambert (Hélène) 100 % Version Allemand. Ellipses ISBN 978-2-7298-7484-1
Les traductions littéraires sont à travailler de manière prioritaire, mais ne négligez pas le reste.

Intégrez bien le vocabulaire grâce à des fiches que vous vous faites, il doit compléter celui que vous connaissez déjà.

CIVILISATION

Si ce n'est pas déjà fait, fichez toute la civilisation apprise en ECG 1 sous forme de notes succinctes mais claires par thèmes (économie, finance, politique étrangère…) de préférence sur ordinateur

Lors de la première colle en septembre, vous présenterez vos fiches dont vous exposerez une, au choix du professeur.

Veuillez lire

Duconseille (Brigitte) Deutschland Aktuell : L'Allemagne d'aujourd'hui, les nouveaux défis. Ellipses (ISBN 9782340066458)

Lors de notre premier cours collectif de civilisation, vous aurez à répondre, en allemand, à 10 questions reprenant des passages essentiels du livre.

ACTUALITE

Ecoutez quotidiennement pendant toutes les vacances les « Nouvelles en 100 secondes » (si possible aussi les vidéos un peu plus développées) sur http://www.tagesschau.de/100sekunden/index.html et notez vous des mots clés.

A la rentrée, au premier cours sur l 'actualité, nous échangerons sur les mots clés pris par vous pendant l'été.

Surfez dans les journaux de langue allemande : les sites ne manquent pas :

Quotidiens allemands :

Berliner Zeitung www.berlinonline.de/
Frankfurter Allgemeine Zeitung www.faz.de
Frankfurter Rundschau www.fr-aktuell.de

Süddeutsche Zeitung [*www.sueddeutsche.de*](http://www.sueddeutsche.de)
Der Tagesspiegel [*www.tagesspiegel.de*](http://www.tagesspiegel.de)
Die Tageszeitung [*www.taz.de/*](http://www.taz.de/)
Die Welt [*www.welt.de*](http://www.welt.de)

Hebdomadaires allemands:

Focus [*www.focus.de/*](http://www.focus.de/)
Der Spiegel [*www.derspiegel.de*](http://www.derspiegel.de)
Die Wirtschaftswoche [*www.wirtschaftswoche.de/*](http://www.wirtschaftswoche.de/)
Die Zeit [*www.zeit.de*](http://www.zeit.de)

Quotidiens suisses:

Basler Zeitung [*www.baz.ch*](http://www.baz.ch)
Neue Zürcher Zeitung [*www.nzz.ch*](http://www.nzz.ch)

Presse autrichienne :

[*www.presse.at*](http://www.presse.at)

Presse européenne en allemand :

[*www.euractiv.de*](http://www.euractiv.de)
[*www.euronews.de*](http://www.euronews.de)

SEJOUR EN Allemagne

Partez en Allemagne : découvrez et parlez !! Attention néanmoins : le parler de la vie de tous les jours donne de la fluidité, mais ne garantit pas forcement la correction grammaticale et, surtout, diffère du vocabulaire d'actualité dont vous avez besoin en CPGE. Pour cela, un seul remède : apprendre à son bureau… Il faut les deux !

MATERIEL A AVOIR EN ECG 2

Marhuenda (Marie) et Viselthier (Bernard). Fiches et Tests de Grammaire. Allemand. Parcours Université. Ophrys Grammaire (ISBN 9 782708 013322)

Scheuermann (Adelgard). Vocabulaire thématique Allemand-Français. Le monde d'aujourd'hui. Ellipses (ISBN 9 782729 838386)

Un grand dictionnaire d'au moins 220 000 mots, édité récemment

Lambert (Hélène) 100 % Thème Allemand. Ellipses (2013) ISBN 978-2-7298-77637

Lambert (Hélène) 100% Version Allemand. Ellipses (2012) ISBN 978-2-7298-7484-1

Duconseille (Brigitte) Deutschland Aktuell : L'Allemagne d'aujourd'hui, les nouveaux défis. Ellipses (ISBN 9782340066458) avril 2022

Il faut un grand classeur (pour la maison), une chemise trois rabats pour les cours (allemand uniquement), du papier. Pas de cahier (cela ne permet pas de s'organiser à long terme)

Bonnes vacances et à bientôt à la rentrée !

Sabine Dragon ***Professeur d'Allemand***

BIBLIOGRAPHIE

I – Philosophie

1- Lectures obligatoires : Ces ouvrages feront l'objet d'un contrôle de lecture à la rentrée

Platon, *Gorgias*, G-F (à lire *in extenso*)

Bible, La Genèse. Lire les chapitres 1 à 7. Si vous ne possédez pas de *Bible*, vous pouvez les lire sur le site suivant :

https://lire.la-bible.net/lecture/genese/1/1

Freud, *Malaise dans la civilisation*, Petite bibliothèque Payot. Lire les chapitres V et VI

Hélène Frappat, *La violence*, G-F corpus,. Lire l'introduction et les extraits suivants : Hobbes p. 64 ; Engels, p. 107 ; Gandhi, p. 178 ; Weil, p. 203

2 – Lectures complémentaires

Sartre, *Huis clos*, Folio

Malm Andreas, *Comment saboter un pipeline*, La Fabrique Éditions

Etty Hillesum*, Une vie bouleversée*, Points

3 - Filmographie

La haine de Mathieu Kassovitz (1995)

Orange mécanique de Stanley Kubrick (1971)

Mon roi de Maïwenn (2015)

Les sentiers de la gloire de Stanley Kubrick (1957)

Le silence des agneaux de Jonathan Demme (1991)

Bonnie and Clyde de Arthur Penn (1967)

II - Littérature

1 – Lectures obligatoires : contrôle de lecture à la rentrée

Alfred de Musset, *Lorenzaccio* (1834) – nombreuses éditions de poche

E. Poe, « Le Chat noir », dans la traduction de C. Baudelaire (1843). C'est une nouvelle que vous trouverez dans le recueil *Nouvelles Histoires extraordinaires* aux éditions Folio-classique ou en ligne sur le site Wikisource.

S. Zweig, *Lettre d'une inconnue* (1927), Folio-Classique

2 - À relire si nécessaire :

Frankenstein ou le Prométhée moderne de Mary Shelley

La Princesse de Montpensier, de Mme de La Fayette (en entier)

3 - Pour approfondir : suggestions de lecture par thématique. La quasi-totalité de ces œuvres fera l'objet d'un cours.

- **Guerres**

Homère, *L'Illiade*
W. Mouawad, *Incendies*

- **2nde guerre mondiale et camps de concentration**

Robert Antelme, *L'Espèce humaine*
Primo Levi, *Si c'est un homme*

- **Violence de la passion amoureuse**

Lettres d'Abélard et Héloïse (éd. Le Livre de Poche, coll. Lettres Gothiques)
Tristan et Iseut (éd. Le Livre de Poche, coll. Lettres Gothiques)

- **Violence sociale et politique**

A. Camus, *Les Justes*
Montaigne, « De la cruauté »
A. Ernaux, *La femme gelée*
A. Césaire, *Cahier d'un retour au pays natal*
E. Zola, *Germinal*

- **Violence de l'inconscient**

G. de Maupassant, *Le Horla*

- **Catastrophe nucléaire**

S. Alexievitch, *La Supplication*

- **Violence éducative**

Jules Vallès, *L'enfant*

- **Violence religieuse**

Voltaire, *Traité sur la tolérance*

- **Autres**

Dante, *La Divine Comédie*, « L'Enfer »
C. de Laclos, *Les Liaisons dangereuses*
C. Baudelaire, *Les Fleurs du Mal*

LYCÉE PAUL CÉZANNE
CLASSE PRÉPARATOIRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE, VOIE GÉNÉRALE

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - INFORMATIQUE

TRAVAIL ESTIVAL 2023

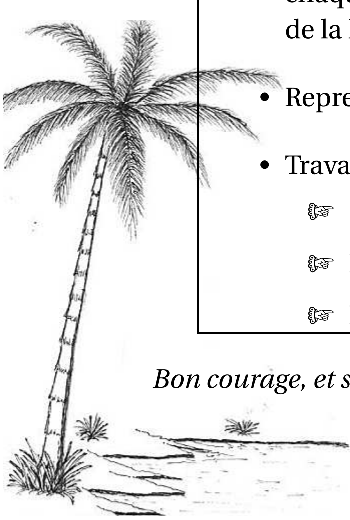
Durant cette pause estivale, il est important de ne pas arrêter complètement de travailler : la seconde année est très courte, les concours démarrent mi-avril et les cours cessent fin mars. Il faut profiter de l'été sans nouvelles notions à apprendre pour consolider vos acquis de première année, en rédigeant des fiches méthodes, tout en retravaillant les devoirs et leurs corrections. Ceci concerne chaque chapitre, y compris le programme d'informatique. Je vous conseille de travailler extrêmement sérieusement le cours : toutes les définitions et tous les théorèmes de première année doivent être sus, y compris les démonstrations que vous avez eues en colle, les techniques étant souvent utiles pour répondre à certains questions dans les sujets de concours. Je vous rappelle que le programme des concours porte sur les deux années, et que les techniques de première année doivent être suffisamment maîtrisées pour envisager sereinement d'acquérir celles de seconde année, même si nous reviendrons largement ensemble sur le programme de première année au travers des exercices.

Pour préparer efficacement la rentrée et ne pas perdre de temps, vous avez le premier chapitre à travailler pendant les vacances. Il s'agit principalement de rappels concernant les suites de nombres réels, avec pour nouveauté dans la partie V l'introduction des relations d'équivalence $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et de négligeabilité $u_n = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(v_n)$. Pour vous entrainer avec ces nouvelles notions, vous devez rédiger les démonstrations des quatre propriétés de la propositions 5.7. D'autre part, la feuille d'exercices est à préparer également, et sera corrigée en classe. Nous reviendrons ensemble rapidement sur ce premier chapitre, en particulier la partie V.

Un premier devoir surveillé de 4h aura lieu le mercredi 13 septembre, et sera composé d'exercices tirés des trois derniers devoirs surveillés de ECG1.

En résumé, voici le travail à faire :

- Revoir les définitions et théorèmes importants (ainsi que leur démonstration) de chaque chapitre du cours de 1re année, et faire des fiches méthodes, en vous aidant de la liste de questions fournie
- Reprendre les devoirs surveillés et leur correction
- Travailler le chapitre I du cours de seconde année
  - ☞ Connaître les définitions, les énoncés de théorèmes importants
  - ☞ Rédiger les démonstrations demandées
  - ☞ Faire les exercices de la fiche associée



Bon courage, et soyez dès à présent sérieux et motivés.

P.-A. GIÉ
pa.gie at live.fr (remplacer at par @)

Lien cliquable vers le padlet ECG2 Mathématiques Appliquées

Liste (non exhaustive) de questions pour la constitution de fiches méthode

1 Analyse

1.1 Fonctions

- ☞ Comment montrer une inégalité ou un encadrement ?
  (opérations élémentaires, croissance ou décroissance des fonctions, étude des variations de la fonction définie par la différence, inégalité des accroissements finis.)
- ☞ Comment calculer une limite ?
  (est-ce une forme indéterminée ?, peut-on utiliser les croissances comparées, ou les équivalents, ou un développement limité pour ensuite simplifier et lever la forme indéterminée ?)
- ☞ Comment montrer qu'une fonction est continue ?
  (par sommes, produits, quotients, composées si c'est sur un intervalle, par un calcul de limite si c'est en un point).
- ☞ Comment montrer qu'une fonction est dérivable ?
  (par sommes, produits, quotients, composées si c'est sur un intervalle, par un calcul de la limite du taux d'accroissement si c'est en un point).
- ☞ Comment montrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$?
  (par sommes, produits, quotients, composées si c'est sur un intervalle, ou en regardant attentivement si f' est continue si f est définie par morceaux).
- ☞ Comment calculer une dérivée ?
  (ne pas se tromper sur les formules pour les produits, quotients, composées, et les fonctions de référence.)
- ☞ Comment montrer qu'une fonction est (strictement) croissante ou décroissante ?
  (calcul de la dérivée qui doit être strictement positive ou négative sauf éventuellement en quelques points, ou composition de fonctions strictement croissantes ou décroissantes, en respectant la règle des signes (croissante = +, décroissante = -) Ainsi, la composée de trois fonctions décroissantes sera décroissante, la composée d'une croissante et d'une décroissante sera décroissante. Ne pas confondre composition et somme : $\ln(2x-3)$ est une composée, mais $\ln(x)+2x-3$ est une somme)
- ☞ Comment montrer qu'une fonction est bijective ?
  (stricte monotonie et continuité sur un intervalle, calcul des limites pour l'intervalle image)
- ☞ Comment montrer qu'une fonction admet un point fixe ?
  (résolution de l'équation $f(x)=x$ si on peut, ou $g(x)=f(x)-x$ bijective puis 0 admet un unique antécédent par g).
- ☞ Quelles sont les propriétés de la bijection réciproque ?
  (même monotonie que f, même continuité, mais pas même dérivabilité : pas en $y=f(x)$ si $f'(x)=0$).
- ☞ Comment étudier la convexité ?
  (signe de la dérivée seconde quand la fonction est $\mathscr{C}^2$)
- ☞ Reconnaître et résoudre une équation différentielle ?

1.2 Suites

- ☞ Comment montrer qu'une suite est monotone ?
  (signe de $u_{n+1}-u_n$, comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si $u_n>0$, récurrence, méthode spécifique aux suites implicites en comparant $f_n(u_n)$ et $f_n(u_{n+1})$)

- ☞ Comment montrer qu'une suite est arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique ?
  (en exprimant u_{n+1} en fonction de u_n)
- ☞ Comment montrer qu'une suite est récurrente linéaire d'ordre 2 ?
  (en exprimant u_{n+2} comme combinaison linéaire de u_n et u_{n+1})
- ☞ Comment déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique ?
  (en étudiant une suite associée $v_n = u_n - \lambda$)
- ☞ Comment déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ?
  (en résolvant l'équation caractéristique et en cherchant λ et μ tels que $u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$ ou $u_n = (\lambda + \mu n)q^n$ suivant le nombre de racines)
- ☞ Comment montrer qu'une suite est convergente ?
  (calcul direct de la limite, théorème de convergence monotone, théorème des gendarmes, théorème des suites adjacentes)
- ☞ Comment montrer qu'une suite est divergente ?
  (calcul direct de la limite $\pm\infty$, théorèmes de minoration, suite croissante non majorée ou suite décroissante non minorée)
- ☞ Comment calculer la limite réelle d'une suite ?
  (calcul direct, ou théorème des gendarmes, ou théorème du point fixe si $u_{n+1} = f(u_n)$ et qu'on sait que (u_n) est convergente.)
- ☞ Comment trouver un équivalent ?
  (termes à négliger dans une somme, quotient qui tend vers 1, opérations licites sur les équivalents usuels, développement limité, utilisation du théorème des gendarmes avec un quotient au milieu et les membres de gauche et droite qui tendent vers 1.)
- ☞ Comment reconnaître une suite implicite et comment l'étudier ?
  (une suite est implicite quand les termes sont définis comme des solutions d'une équation avec une fonction f ou une famille de fonctions f_n dépendant d'un entier n. Pour l'étudier, toujours revenir à la définition en appliquant la fonction f).

1.3 Séries

- ☞ Quelles sont les séries convergentes de référence ?
  (séries géométriques $\sum\limits_{k\geqslant 0} q^k$, géométriques dérivées $\sum\limits_{k\geqslant 0} kq^{k-1}$, géométriques dérivées secondes $\sum\limits_{k\geqslant 2} k(k-1)q^{k-2}$ avec $|q|<1$, séries exponentielles $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{k!}$ avec $x \in \mathbb{R}$)
- ☞ Qu'est-ce qu'une série télescopique ?
  (Quand on peut simplifier presque tous les termes en calculant la somme partielle $S_N = \sum\limits_{k=0}^{N}$)
- ☞ Comment prouver qu'une série converge ?
  (Retour à la définition en montrant que la somme partielle $S_N = \sum\limits_{k=0}^{N}$ possède une limite réelle quand N tend vers $+\infty$)
- ☞ Comment prouver qu'une série diverge ?
  (Retour à la définition en montrant que la somme partielle $S_N = \sum\limits_{k=0}^{N}$ ne possède pas de limite réelle quand N tend vers $+\infty$)

- ☞ Comment calculer la somme d'une série?
  (À l'aide des formules des séries géométriques : $\frac{1}{1-q}$, $\frac{1}{(1-q)^2}$, $\frac{2}{(1-q)^3}$ ou exponentielles : e^x, et en faisant attention à l'indice de départ des sommes. Ou en calculant directement la limite de la suite des sommes partielles, par exemple quand la série est télescopique)
- ☞ Comment prouver qu'une série converge absolument?
  (Montrer que la série $\sum |u_k|$ converge, et si c'est le cas, alors la série $\sum u_k$ converge également.)

1.4 Intégrales

- ☞ comment calculer une intégrale grâce à une primitive?
  (reconnaître $u'u^\alpha$ ($\alpha \neq -1$), $\frac{u'}{u}$ ou $u'e^u$, en rajoutant des constantes multiplicatives si besoin)
- ☞ Comment faire une intégration par parties?
  (attention au cas ln × polynôme ou polynôme × exponentielle)
- ☞ Comment faire un changement de variable?
  (changer : les bornes, le dt, et la variable.)
- ☞ Comment étudier une fonction définie par une intégrale $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$?
  (penser à utiliser une primitive inconnue F de f)
- ☞ Comment étudier une suites d'intégrales?
  (définition : impropre ou non, monotonie et encadrement avec théorème de positivité)

2 Algèbre

- ☞ Comment résoudre un système linéaire?
  (pivot de Gauss)
- ☞ Comment calculer les puissances d'une matrice carrée?
  (Par récurrence, avec la formule du binôme si c'est une somme de deux matrices qui commutent, avec des suites (a_n) et (b_n) si on a une expression du genre $A^n = a_n A + b_n I$)
- ☞ Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée?
  (opérations élémentaires sur les lignes de la matrice et sur les lignes de la matrice identité, ou résoudre le système $P\begin{pmatrix} x \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \end{pmatrix}$)
- ☞ Si $A = PDP^{-1}$, comment faire la récurrence pour avoir $A^n = PD^nP^{-1}$?
  (...)

3 Probabilités discrètes

- ☞ Comment calculer la probabilité d'un événement par dénombrement?
  (s'il y a équiprobabilité et modèle de tirages simultanés, en calculant des combinaisons $\binom{n}{p}$)
- ☞ Comment calculer la probabilité d'une réunion d'événements?
  (formule du crible si l'union est finie, et si l'union est infinie, voir si les événements sont 2 à 2 incompatibles, ou si la famille est croissante)
- ☞ Comment calculer la probabilité d'une intersection d'événements?
  (formule des probabilités composées avec probabilités conditionnelles si l'intersection est finie, produit des probabilités en cas d'indépendance)

☞ <u>Comment écrire la formule des probabilités totales avec un système complet d'événements fini ou infini ?</u>
($P(B) = \sum_k P(A_k \cap B) = \sum_k P(A_k) P_{A_k}(B)$ pour des événements)
($P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) P_{[X=x]}(Y = y)$ avec des variables aléatoires)

☞ <u>Comment calculer des probabilités conditionnelles en interprétant les données écrites dans l'énoncé ?</u>
(Si… alors… dans un énoncé d'exercice de probabilité donne souvent une probabilité conditionnelle)

☞ <u>Comment calculer l'espérance d'une variable aléatoire discrète ?</u>
(convergence absolue de la série $\sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$ puis calcul de la somme de cette série)

☞ <u>Comment calculer la variance d'une variable aléatoire discrète ?</u>
(existence par convergence absolue de la série $\sum_{k \in X(\Omega)} k^2 P(X = k)$ ou $\sum_{k \in X(\Omega)} k(k-1) P(X = k)$, puis formules de linéarité de l'espérance et de Kœnig-Huygens)

☞ <u>Comment appliquer le théorème du transfert ?</u>
(voir l'analogie avec l'espérance de X^2 pour savoir calculer $E(X(X-1))$, $E(2^X)\ldots$)

☞ <u>Comment reconnaître une loi usuelle ?</u>
(par le modèle expérimental pour les lois de Bernoulli, binomiales, géométriques, ou par le calcul du support et de la loi de probabilité)

Chapitre I – Compléments sur les suites numériques

Table des matières

1 Suites usuelles

1.1 Suites arithmétiques et géométriques

1.1.1 Suites arithmétiques

Suite arithmétique

Définition 1.1. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est **arithmétique** s'il existe un réel r (indépendant de n) tel que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = u_n + r}$$

Le réel r s'appelle la **raison** de la suite.

Exemple 1.2. La suite des entiers naturels pairs est arithmétique de raison $r = 2$: $0, 2, 4, 6, 8, \ldots$

Monotonie

Proposition 1.3. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si $r < 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- Si $r = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Expression du terme général

Proposition 1.4. Soit n et p des entiers naturels. Alors :

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p) \times r.}$$

En particulier : $\boxed{u_n = u_0 + n \times r}$ et $\boxed{u_n = u_1 + (n-1) \times r}$

Exemple 1.5. Si $u_3 = 4$ et $r = 2$, alors $u_8 = u_3 + (8-3) \times r = 4 + 5 \times 2 = 14$.

1.1.2 Suites géométriques

Suite géométrique

Définition 1.6. Une suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$ est **géométrique** s'il existe un réel q (indépendant de n) tel que

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad v_{n+1} = q \times v_n}$$

Le réel q s'appelle la **raison** de la suite.

Exemple 1.7. La suite des puissances de 2 est géométrique de raison 2 : $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

Monotonie

Proposition 1.8. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q, avec $\boxed{v_0 > 0}$

- Si $q > 1$, alors (v_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$, alors (v_n) est décroissante.
- Si $q = 0$ ou $q = 1$, alors (v_n) est stationnaire.
- Si $q < 0$, alors (v_n) n'est pas monotone.

Si $\boxed{v_0 < 0}$, on obtient les monotonies inverses dans les deux premiers cas.

Expression du terme général

Proposition 1.9. Soit n et p des entiers naturels. Alors :

$$\boxed{v_n = v_p \times q^{n-p}.}$$

En particulier : $\boxed{v_n = v_0 \times q^n}$ et $\boxed{v_n = v_1 \times q^{n-1}}$

Exemple 1.10. Si $v_2 = -1$ et $q = 3$, alors $v_6 = v_2 \times q^{6-2} = -1 \times 3^4 = -81$.

Somme classique

Lemme 1.11. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$1+2+3+\ldots+n=\sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Somme des $n+1$ premiers termes

Théorème 1.12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$, la somme des $n+1$ premiers termes de cette suite. Alors on a : $S_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$
La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la demi-somme des termes extrêmes :

$$\begin{pmatrix} \textit{nombre} \\ \textit{de termes} \end{pmatrix} \times \frac{\textit{1}^{er}\ \textit{terme} + \textit{dernier terme}}{2}$$

Exemple 1.13. $1+2+3+\ldots+n=n\times\frac{1+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$.

Somme classique

Lemme 1.14. Soit $q \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$1+q+q^2+\ldots+q^n=\sum_{k=0}^{n} q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Somme des $n+1$ premiers termes

Théorème 1.15. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et $S_n=\sum_{k=0}^{n} v_k$, la somme des $n+1$ premiers termes de cette suite. On a :

- $S_n=v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ *si* $q\neq 1$
- $S_n=(n+1)v_0$ *si* $q=1$

La somme de N termes consécutifs d'une suite géométrique est égale au produit du premier terme par $\frac{1-q^N}{1-q}$:

$$(\textit{1}^{er}\ \textit{terme}) \times \frac{1-\textit{raison}^{\textit{nombre de termes}}}{1-\textit{raison}}.$$

Exemple 1.16. $2+4+8+16+32+64+128=2\times\frac{1-2^7}{1-2}=254$.

1.2 Suites arithmético-géométriques

1.2.1 Définition

Suite arithmético-géométrique

Définition 1.17. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique s'il existe deux nombres réels $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ et $b\in\mathbb{R}^*$ tels que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=au_n+b.}$$

Remarque 1.18.

1. Si $a=1$, la suite est arithmétique de raison b.
2. Si $b=0$, la suite est géométrique de raison a.
3. Si $a=0$, la suite est constante.

1.2.2 Expression du terme général

Expression du terme général

Proposition 1.19. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique du type $u_{n+1} = au_n + b$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (avec a, b réels, $a \notin \{0,1\}$ et $b \neq 0$). Alors il existe un réel λ tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \lambda$ soit géométrique de raison a.
De plus, le réel λ est l'unique solution de l'équation $ax + b = x$.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On calcule :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \lambda = au_n + b - \lambda = a(v_n + \lambda) + b - \lambda = av_n + a\lambda + b - \lambda.$$

Si on considère λ tel que $a\lambda + b - \lambda = 0$, on a $v_{n+1} = av_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a, et λ est bien l'unique solution de l'équation $ax + b = x$. □

Méthode : Expression du terme général d'une suite arithmético-géométrique

☞ Une suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du type $u_{n+1} = au_n + b$ étant donnée :

1. On résout l'équation $ax + b = x$. On note λ l'unique solution.
2. On prouve que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \lambda$ est géométrique de raison a :
   - Soit en exprimant $v_{n+1} = u_{n+1} - \lambda$ en fonction de v_n en utilisant $u_{n+1} = au_n + b$ et $\lambda = a\lambda + b$.
   - Soit en posant la soustraction :

$$\begin{array}{rcccccc} & u_{n+1} & = & a & u_n & + & b \\ - & & & & & & \\ & \lambda & = & a & \lambda & + & b \\ \hline & u_{n+1}-\lambda & = & a & (u_n - \lambda) & & \end{array}$$

   qui conduit au résultat : $v_{n+1} = av_n$.

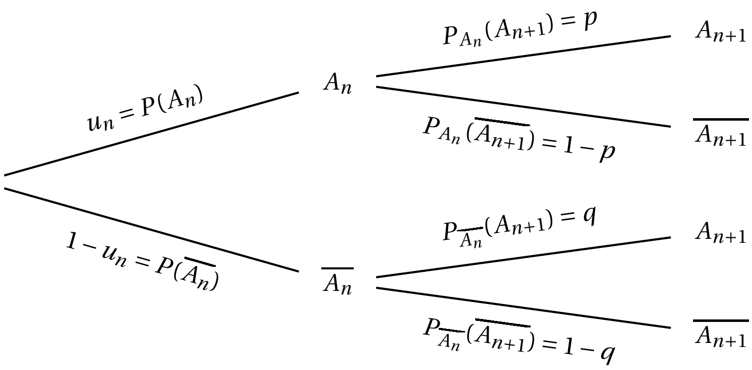
3. On en déduit le terme général $v_n = v_0 a^n$ ou $v_n = v_p a^{n-p}$ en général
4. Calcule le premier terme $v_0 = u_0 - \lambda$ ou $v_p = u_p - \lambda$
5. On en déduit le terme général $u_n = v_n + \lambda$.

Exercice 1.20. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 5u_n + 6$. Calculer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 1.21. On place 5000 € avec intérêts annuels composés de 4% et on ajoute 1000 € en début de chaque année. Soit u_n la somme disponible après n années. Au bout de combien d'années peut-on s'acheter une voiture à 46 000 € ?

1.2.3 Cas particulier important

On obtient souvent une suite arithmético-géométrique en probabilités. Une épreuve de Bernoulli (présentant deux résultats possibles) est effectuée plusieurs fois de façon non indépendante : le résultat de l'étape $n+1$ dépend du résultat de l'étape n avec certaines probabilités indépendantes de n (processus appelé **chaîne de Markov**) :



On calcule alors $u_{n+1} = P(A_{n+1})$ en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\{A_n, \overline{A_n}\}$, et on obtient :

$$u_{n+1} = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = pu_n + q(1-u_n) = (p-q)u_n + q.$$

Exemple : On s'intéresse à la probabilité qu'un spectacle soit complet lors de ses représentations. À la première représentation, le spectacle est complet. Les spectateurs présents donnent leur avis et influent sur l'affluence du lendemain :

- Si le spectacle est complet un jour donné, il sera complet le lendemain avec la probabilité 0,75.
- Si le spectacle n'est pas complet un jour donné, il sera complet le lendemain avec la probabilité 0,5.

On note C_n l'événement « le spectacle est complet le jour n » et $p_n = P(C_n)$ sa probabilité.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les événements C_n et $\overline{C_n}$ constituent un système complet d'événements. En appliquant la formule des probabilités totales, on trouve :

$$p_{n+1} = P(C_{n+1}) = P(C_n \cap C_{n+1}) + P(\overline{C_n} \cap C_{n+1}) = 0,75p_n + 0,5(1-p_n) = 0,25p_n + 0,5.$$

En appliquant la méthode, on trouve ensuite : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

1.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Définition 1.22. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite récurrente linéaire d'ordre 2 lorsqu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n}$$

Expression du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Théorème 1.23. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2, donnée par ses deux premiers termes, et la relation : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$.
Considérons son **équation caractéristique** $x^2-ax-b=0$, notons Δ son discriminant. Il y a trois cas :

- Si $\Delta>0$, notons q_1 et q_2 les deux solutions de l'équation caractéristique.
  Alors il existe un unique couple de réels (λ,μ) tel que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\lambda q_1^n+\mu q_2^n}$$

- Si $\Delta=0$, notons q l'unique solution de l'équation caractéristique.
  Alors il existe un unique couple de réels (λ,μ) tel que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=(\lambda+\mu\times n)q^n}$$

- Si $\Delta<0$, alors l'équation caractéristique n'admet pas de solution réelle. Hors programme!

Remarque 1.24. La donnée des deux premiers termes de la suite permet de calculer tous les autres termes.

Méthode : Expression du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

☞ Le but est d'exprimer simplement le terme général u_n en fonction de n.
Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

1. On résout l'**équation caractéristique** de la suite, c'est-à-dire l'équation du second degré :

$$\boxed{x^2 = ax + b} \quad \text{i.e.} \quad x^2 - ax - b = 0$$

   Notons Δ son discriminant.

2.
   - Premier cas : si $\Delta > 0$, alors existe un unique couple de réels (λ, μ) tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$ en notant q_1 et q_2 les deux solutions de l'équation caractéristique.
   - Second cas : si $\Delta = 0$, alors il existe un unique couple de réels (λ, μ) tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda + \mu \times n)q^n$ en notant q l'unique solution de l'équation caractéristique.
   - Troisième cas : si $\Delta < 0$, hors programme! (ce cas n'arrivera pas).

3. Pour finir on détermine les valeurs λ et μ en résolvant un système linéaire obtenu grâce aux premiers termes de la suite :

   - Si $\Delta = 0$:
     Si on connait u_0 et u_1, on résout :
     $\begin{cases} \lambda = u_0 \\ (\lambda + \mu)q = u_1 \end{cases}$
     Si on connait u_1 et u_2, on résout :
     $\begin{cases} (\lambda + \mu)q = u_1 \\ (\lambda + 2\mu)q^2 = u_2 \end{cases}$
   - Si $\Delta > 0$:
     Si on connait u_0 et u_1, on résout :
     $\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda q_1 + \mu q_2 = u_1 \end{cases}$
     Si on connait u_1 et u_2, on résout :
     $\begin{cases} \lambda q_1 + \mu q_2 = u_1 \\ \lambda q_1^2 + \mu q_2^2 = u_2 \end{cases}$

Exercice 1.25.

1. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$.
2. Étudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = v_1 = 1$ et $v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$.

2 Limites de suites

2.1 Suites convergentes ou divergentes

Suites convergentes, divergentes

Proposition et définition 2.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

1. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe et égale à un nombre réel. Dans ce cas :
   - La limite est unique :
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell_2\end{array}\right\} \Longrightarrow \ell_1 = \ell_2$$
   - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   - Toute sous-suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente, et de même limite. En particulier : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente** lorsqu'elle ne possède pas de limite ou lorsqu'elle tend vers $\pm\infty$.

Remarque 2.2. Attention, une suite bornée n'est pas nécessairement convergente, par exemple $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Méthode : sous-suites

On peut utiliser la propriété des sous-suites sous sa forme contraposée : si on a deux sous-suites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'ont pas la même limite alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Exemple 2.3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n$ est divergente car la suite paire et la suite impaire extraites n'ont pas la même limite $(1 \neq -1)$.

On dispose également du résultat :

Sous-suites paire et impaire extraite

Théorème 2.4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si les sous-suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite ℓ.

2.2 Suites géométriques

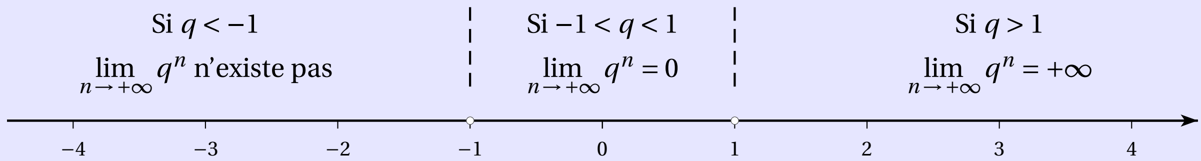
Tout d'abord, le cas des suites $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Limite de q^n

Théorème 2.5. Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q < -1$ ou $q = -1$ alors $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite (donc diverge).
- Si $q = 1$ alors $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante égale à 1 et converge vers 1.

Résumé suivant les valeurs de q reportées sur un axe gradué :



Démonstration. Pour $q \neq 0$, on étudie $\lim\limits_{n\to+\infty} |q^n|$ en écrivant $|q^n| = |q|^n = e^{n\ln(|q|)}$. □

Méthode : limite d'une suite géométrique

Pour étudier la limite d'une suite géométrique définie par u_0 et $u_n = q^n u_0$, il ne faut pas oublier de tenir compte du signe de u_0 et appliquer les règles sur les opérations concernant les limites (paragraphe suivant).

2.3 Opérations sur les limites

Sommes, produits, quotients

Proposition 2.6. Si deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2, alors :

- Leur somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $\ell_1 + \ell_2$;
- Leur produit $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergent, de limite $\ell_1\ell_2$;
- Si $\ell_2 \neq 0$, il existe un entier n_0 tel que $v_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant n_0$. Alors le quotient $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est convergent, de limite $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Dans tous les autres cas, on se réfère au tableau des opérations sur les limites.

On observe plusieurs **formes indéterminées (F.I.)** : $\infty - \infty$, $\infty \times 0$, $\frac{\ell}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$. En général pour lever les F.I., il faudra factoriser par le terme dominant, on y reviendra dans la dernière partie de ce chapitre.

Opérations sur les limites réelles ou infinies

Proposition 2.7. (ℓ_1 et ℓ_2 désignent deux nombres réels).
La plupart du temps, les opérations avec des limites infinies consistent en une application des règles de signes.

Somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$
On peut rencontrer la forme indéterminée « $\infty - \infty$ » :

$+$		$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$		
		$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	⛔
	$-\infty$	$-\infty$	⛔	$-\infty$

Produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$
On peut rencontrer la forme indéterminée « $0 \times \infty$ » :
(On utilise la règle des signes pour $\pm\infty$.)

$\times$		$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$		
		$\ell_2 \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell_1 \neq 0$	$\ell_1 \times \ell_2$	0	$\pm\infty$
	0	0	0	⛔
	$\pm\infty$	$\pm\infty$	⛔	$\pm\infty$

Quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$
(avec $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.)
On peut rencontrer les formes indéterminées « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » et « $\dfrac{?}{0}$ » :
(On utilise la règle des signes pour $\pm\infty$.)

$\div$		$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$			
		$\ell_2 \neq 0$	0^+ ou 0^-	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell_1 \neq 0$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$\pm\infty$	0	⛔
	0	0	⛔	0	⛔
	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	⛔	⛔

2.4 Unicité de la limite et suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Point fixe

Définition 2.8. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **point fixe** de f tout réel x_0 solution de l'équation $f(x) = x$. Autrement dit :

$$\boxed{x_0 \text{ est un point fixe de } f \text{ si, et seulement si } f(x_0) = x_0.}$$

Méthode : recherche d'un point fixe

Il y a deux méthodes selon la question posée :

- S'il est demandé de déterminer ou de calculer le(s) point(s) fixe(s) de f, il faut résoudre l'équation $f(x) = x$.
- S'il est demandé de justifier l'existence d'un point fixe de f (sans demander sa valeur), on étudie la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$: on prouve qu'elle est bijective sur un intervalle I, que 0 appartient à $g(I)$ et on raisonne avec le théorème de la bijection.

  Une valeur approchée pourra être déterminée par dichotomie ou grâce à l'étude d'une suite récurrente de limite α.

Exemple 2.9. Montrer que la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{-x}$ possède un unique point fixe α, et que $\alpha \in [0;1]$.

Intervalle stable

Définition 2.10. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que l'intervalle I est **stable** par f si, et seulement si, pour tout réel x de I, alors $f(x)$ est élément de I.
En particulier, l'intervalle $[a;b]$ est stable par f si, et seulement si :

$$a \leqslant x \leqslant b \Longrightarrow a \leqslant f(x) \leqslant b.$$

Méthode : intervalle stable

Pour montrer qu'un intervalle $[a;b]$ est stable par f, on pourra :

1. Partir de $a \leqslant x \leqslant b$ et effectuer des opérations élémentaires pour arriver à $a \leqslant f(x) \leqslant b$;
2. Étudier les variations de f sur $[a;b]$.

Exemple 2.11.

1. Soit $f(x) = \sqrt{2x+4}$, pour tout $x \geqslant -2$. Montrer que l'intervalle $[0;4]$ est stable par f.
2. Soit $f(x) = x(1-x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intervalle $[0;1]$ est stable par f.

Théorème du point fixe

Théorème 2.12. Soit f une fonction définie sur un intervalle stable I, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par son premier terme $u_0 \in I$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, et si f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad (\in \mathbb{R}) \\ f \text{ continue en } \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow f(\ell) = \ell}$$

Démonstration. L'unicité de la limite est l'argument essentiel. En effet, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$$

(limite d'une sous-suite d'une suite convergente).
D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue en ℓ, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Par unicité de la limite, on a nécessairement $f(\ell) = \ell$. □

Remarque 2.13. L'intervalle stable I sert à établir que la suite est bien définie : on prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n \in I$.

On se référera à la méthode.

3 Limites de suites et inégalités

3.1 Comparaison de suites

Théorème de positivité

Théorème 3.1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive à partir d'un certain rang (pour tout $n \geqslant n_0$) et qui converge vers ℓ, alors $\ell \geqslant 0$. Autrement dit :

$$\boxed{\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n > 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \ell \geqslant 0}$$

Autrement dit :

La limite d'une suite convergente et positive (à partir d'un certain rang) est **POSITIVE OU NULLE.**

Prolongement des inégalités

Corollaire 3.2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites **convergentes** telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{r}\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \Longrightarrow \ell \leqslant \ell'}$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la suite $v-u$ positive et convergente vers $\ell'-\ell$. □

Remarque 3.3. **Ces résultats sont faux avec des inégalités strictes.**
Par exemple, $\frac{1}{n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, mais $\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc ℓ n'est pas strictement positive !
Également, si $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 2 + \frac{1}{n}$, alors on a : $u_n < v_n$ pour tout $n \geqslant 1$, et pourtant $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2 = \lim_{n\to+\infty} v_n$.

Théorèmes de minoration

Théorème 3.4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

1. **Suite minorée par une suite de limite** $+\infty$: si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2. **Suite majorée par une suite de limite** $-\infty$: si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

1. $$\left.\begin{array}{r}\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

2. $$\left.\begin{array}{r}\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Remarque 3.5. ⚠ On ne peut rien dire si $u_n \leqslant v_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Par exemple, avec $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = n$.

3.2 Encadrements de suites

Théorème des gendarmes ou des encadrements

Théorème 3.6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

à partir d'un certain rang. Supposons de plus que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ. Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de même limite ℓ.

$$\left.\begin{array}{r}\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge, et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge, et } \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell\end{array}\right\} \Longrightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge, et } \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$$

Remarque 3.7. ⚠ On ne peut rien dire si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite.

Produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0

Corollaire 3.8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **bornée** et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **convergeant vers** 0. Alors la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

$$\left.\begin{array}{r}\exists K \in \mathbb{R}\,;\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant K \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$$

4 Suites monotones et limites

4.1 Suites monotones

Suites croissantes, décroissantes

Définition 4.1.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- Une suite **monotone** est une suite croissante ou décroissante.

Méthode : Comment déterminer la monotonie d'une suite réelle

☞ Cas général : on étudie la différence entre deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$ et on détermine si son signe est fixe pour n assez grand :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall n \geqslant R, & u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \Longrightarrow (u_n)_{n\geqslant R} \text{ croissante} \\ \forall n \geqslant R, & u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \Longrightarrow (u_n)_{n\geqslant R} \text{ décroissante} \end{array}}$$

☞ Cas des suites à termes positifs : si **tous** les termes de la suite sont strictement positifs (à partir d'un certain rang), on compare le quotient de deux termes consécutifs à 1 :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall n \geqslant R, & \left.\begin{array}{r} u_n > 0 \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow (u_n)_{n\geqslant R} \text{ croissante} \\ \forall n \geqslant R, & \left.\begin{array}{r} u_n > 0 \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow (u_n)_{n\geqslant R} \text{ décroissante} \end{array}}$$

☞ Cas des suites définies par une formule de récurrence : on peut établir la monotonie d'une suite récurrente en étudiant le signe de $f(x) - x$, ou en prouvant la proposition $\mathscr{P}(n)$ par récurrence. On pose $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1}$ » pour montrer qu'elle est croissante, ou $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \geqslant u_{n+1}$ » pour montrer qu'elle est décroissante.
Cette méthode fonctionne très bien pour les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction croissante.

☞ Cas des suites définies implicitement : pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par une équation du type $f_n(u_n) = a$ (avec a réel fixé) ou $f(u_n) = v_n$ (où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite donnée), on compare $f_n(u_n)$ avec $f_n(u_{n+1})$ puis on utilise la monotonie de f_n.

4.2 Suites majorées, minorées, bornées

Théorème de la limite monotone

Théorème 4.2.

- Toute suite **croissante** | **majorée** est convergente
  non majorée diverge vers $+\infty$
- Toute suite **décroissante** | **minorée** est convergente
  non minorée diverge vers $-\infty$

Remarque 4.3. ⚠ Pour une suite croissante, le majorant de la suite est un majorant de la limite mais **ce n'est pas nécessairement la limite.**
En effet, s'il existe un majorant, il en existe une infinité. Or, la limite d'une suite est unique.

Méthode : limite d'une suite monotone

Pour une suite monotone, on a deux possibilités : soit elle est bornée et elle converge, soit elle n'est pas bornée et elle diverge vers l'infini. Précisément :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante	majorée par M	non majorée
	converge vers ℓ $u_0 \leqslant \ell \leqslant M$	diverge vers $+\infty$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante	minorée par m	non minorée
	converge vers ℓ $m \leqslant \ell \leqslant u_0$	diverge vers $-\infty$

4.3 Suites adjacentes

Parfois on ne peut pas montrer directement qu'une suite est convergente mais on peut utiliser une autre suite et la notion de suites adjacentes :

Suites adjacentes

Définition 4.4. Deux suites sont dites **adjacentes** si et seulement si :

1. l'une est croissante
2. l'autre est décroissante
3. la différence tend vers 0

Méthode : suites adjacentes

Pour montrer que deux suites sont adjacentes, on prouve que :

- l'une est croissante;
- l'autre est décroissante;
- la différence tend vers zéro.

Suites adjacentes

Théorème 4.5. Deux suites adjacentes sont convergentes et de même limite.

Remarque 4.6. Le théorème portant sur les suites adjacentes donne DEUX résultats : la convergence, puis la limite. Ceci implique qu'un couple de suites adjacentes ne tend pas vers une limite infinie.
L'avantage de ce théorème est que, sans rien faire, on obtient la convergence des deux suites. L'inconvénient est que l'on a aucune idée de la valeur de la limite commune !

5 Outils de comparaisons pour les suites

5.1 Définition

Suites équivalentes ou négligeables

Définition 5.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, avec $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou que « u_n est un petit o de v_n » (au voisinage de $+\infty$), et on écrit $\boxed{u_n \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}(v_n)}$ si, et seulement si :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0}$$

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **équivalente** à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (au voisinage de $+\infty$), et on écrit $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n}$ si, et seulement si :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1}$$

Remarque 5.2.

- $u_n \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}(v_n)$ si et seulement s'il existe une suite (ε_n) tendant vers 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$. Il s'agit en fait de la vraie définition !
- Un des buts des équivalents et des négligeables est de simplifier le calcul des limites.
- **Une suite n'est jamais équivalente à 0** (sauf la suite constante nulle ou nulle à partir d'un certain rang).

Exemple 5.3. $2+2^{-n} \underset{+\infty}{\sim} 2$; $\dfrac{2n^3+n^2+4n}{n^4} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$ et $n^5+5n^7+5 \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}(n^8)$.

Proposition 5.4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites non nulles APCR, alors :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}(v_n) \iff u_n - v_n \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}(u_n).$$

Remarque 5.5. Cette proposition est utile pour montrer l'équivalence de deux suites : on peut montrer que leur différence est négligeable devant l'une ou l'autre des suites.

Remarque 5.6. ⚠ Cela ne veut pas dire que $u_n - v_n$ converge vers 0. Contre-exemple avec $u_n = n$ et $v_n = n+1$.

5.2 Propriétés

Opérations sur les équivalents : produit, quotient, élévation à une puissance, valeur absolue

Proposition 5.7. On considère des suites non nulles à partir d'un certain rang. On a alors :

1. **Produit :**

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \\ r_n \underset{+\infty}{\sim} s_n \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \times r_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \times s_n$$

(En particulier, c'est vrai pour $r_n = s_n$).

2. **Quotient :**

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \\ r_n \underset{+\infty}{\sim} s_n \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{u_n}{r_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{v_n}{s_n}$$

3. **Élévation à une puissance réelle :** Pour tout réel α :

$$\left.\begin{array}{r} u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \\ u_n > 0,\ v_n > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} v_n^\alpha$$

(En particulier, c'est vrai pour $\alpha = \frac{1}{2}$ donc pour la racine carrée).

4. **Valeur absolue** :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow |u_n| \underset{+\infty}{\sim} |v_n|$$

Propriétés des relations o et $\sim$

Proposition 5.8. On considère des suites non nulles à partir d'un certain rang. On a alors :

1. **Transitivité :**

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$$

2. **Équivalents et négligeables :**

$$u_n = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(v_n) \Longrightarrow u_n + v_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$$

Dans une somme, on peut négliger les termes... négligeables !

3. **Passage à l'inverse :**

$$\left.\begin{array}{r} u_n = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(v_n) \\ u_n \neq 0 \text{ et } v_n \neq 0 \text{ a.p.c.r} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{1}{v_n} = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

Équivalents de polynômes ou de fractions rationnelles au voisinage de $+\infty$

Corollaire 5.9. Soit $u_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ et $v_n = b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \ldots + b_1 n + b_0$ deux suites polynomiales ($p, q \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_p, b_0, b_1, \ldots, b_q \in \mathbb{R}$). Alors :

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} a_p n^p} \qquad \boxed{\frac{u_n}{v_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_p n^p}{b_q n^q} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_p}{b_q} n^{p-q}}$$

Équivalents et limites

Proposition 5.10. On considère des suites non nulles à partir d'un certain rang. On a alors :

1. $u_n = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(1) \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.
2. Soit $\ell \neq 0$. Alors :

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\ell} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell}$$

Remarque 5.11. ⚠ Les fautes de raisonnement arrivent très vite avec les équivalents. Ce qu'il faut retenir principalement de cette proposition est qu'on peut multiplier ou diviser des équivalents MAIS SURTOUT pas additionner (ou soustraire) les équivalents, ni les composer !

- Si $u_n = n + \frac{1}{n}$, $v_n = -n + 1$. On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$, $v_n \underset{+\infty}{\sim} -n$ et $u_n + v_n = \frac{1}{n} + 1 \underset{+\infty}{\sim} 1$ alors que $n + (-n) = 0$.
- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ cela n'implique pas $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$. Par exemple, si $u_n = 1$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$.
- De même, si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ cela n'implique pas $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$. Par exemple, si $u_n = n$ et $v_n = n + 1$.

5.3 Utilisation

Deux suites équivalentes sont de même nature

Théorème 5.12. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **de même nature**, c'est-à-dire :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et dans ce cas elles ont la même limite.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si, et seulement si, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (idem pour $-\infty$).
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite si, et seulement si, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Utilisation de la relation de négligeabilité

Théorème 5.13.

- « Théorème des gendarmes » :

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} u_n \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}\,(v_n) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

- « Théorème de minoration » :

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} u_n \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}\,(v_n) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |v_n| = +\infty}$$

5.4 Croissances comparées

On peut réécrire les croissances comparées avec ces définitions :

Croissances comparées

Théorème 5.14.

- « le logarithme est négligeable devant les puissances » :
$\boxed{\ln(n) \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}\,(n)}$ ou, plus généralement : $\forall \alpha > 0$, $\forall \beta > 0$, $\boxed{\left(\ln(n)\right)^{\alpha} \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}\left(n^{\beta}\right)}$
- « les puissances sont négligeables devant l'exponentielle » :
$\boxed{n \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}\,(e^{n})}$ ou, plus généralement : $\forall \alpha > 0$, $\forall \beta > 0$, $\boxed{n^{\alpha} \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}\left(e^{\beta n}\right)}$
- « l'exponentielle est négligeable devant la factorielle » :
$\boxed{e^{n} \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}\,(n!)}$ ou, plus généralement : $\forall q > 0$, $\boxed{q^{n} \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}\,(n!)}$

Méthode : croissances comparées

Quand la croissance comparée n'est pas directe, il faut revenir à une forme exponentielle pour utiliser l'une des formules ci-dessus.

Exemple 5.15. Quelle est la limite de $n^2 \times 2^{-n}$?

5.5 Formes indéterminées

Méthode : pour lever les indéterminations

1. Formes indéterminées du type $\infty - \infty$.
   Pour lever une telle indétermination, on factorise par le terme qui croit le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$.
   On peut retenir que les polynômes sont équivalents en $+\infty$ à leur monôme de plus haut de degré (à savoir démontrer).
2. Formes indéterminées du type $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par le terme qui croit le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$ au numérateur et au dénominateur, puis on simplifie.
   On peut retenir que les fractions rationnelles sont équivalentes en $+\infty$ au quotient de leurs monômes de plus haut de degré (à savoir démontrer).
3. Formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$.
   On factorise par le terme qui décroit le plus lentement en valeur absolue vers 0 au numérateur et au dénominateur, puis on simplifie.

Exemple 5.16.

1. $e^n - n^2 \underset{+\infty}{\sim} e^n$ car $n^2 = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(e^n)$ par croissances comparées, donc :
$$\lim_{n\to+\infty} e^n - n^2 = \lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty.$$
2. $\frac{e^n - n^2}{3^n - \ln(n)^{10}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{3^n}$ car $n^2 = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(e^n)$ par croissances comparées, et $\ln(n)^{10} = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(3^n)$ par croissances comparées, et on fait le quotient des équivalents. Ensuite :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n - n^2}{3^n - \ln(n)^{10}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n = 0$$
car $-1 < \frac{e}{3} < 1$.
3. $\frac{1+2^{-n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\ln(n)}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\frac{-1}{\ln(n)}} \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$ car $\lim_{n\to+\infty} 2^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $2^{-n} = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(1)$, et : $\ln(n) = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}\left(\sqrt{n}\right)$ par croissances comparées, donc $\frac{1}{\sqrt{n}} = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$, et on fait le quotient des équivalents. Ensuite :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2^{-n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\ln(n)}} = \lim_{n\to+\infty} -\ln(n) = -\infty.$$

On dispose d'équivalents particuliers pour lever des formes indéterminées spécifiques :

Équivalents remarquables

Proposition 5.17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite **nulle**. Alors :

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ (1+u_n)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha u_n}$$

$$\boxed{\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n} \qquad \boxed{e^{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n}$$

Remarque 5.18. ⚠ **C'est faux si la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **ne tend pas vers 0.**
Par exemple : $\ln(1+n)$ n'est pas équivalent à n au voisinage de $+\infty$, car :

$$\frac{\ln(1+n)}{n} = \frac{\ln\left(n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)}{n} = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

en utilisant $\frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées et $\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On a donc : $\ln(1+n) \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}(n)$.

Exemple 5.19. Donner un équivalent puis la limite de :

1. $x_n = 2^n(\sqrt{1+e^{-n}}-1)$
2. $y_n = (n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
3. $z_n = n(e^{\frac{2}{n}}-1)$

♣ ♢ ♠

Feuille d'exercices sur le chapitre I

Suites numériques, outils de comparaison

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.
Pour étudier cette suite, on introduit la suite auxiliaire définie par $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
2. En déduire le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis déterminer sa limite.

Exercice 2. Donner l'expression des suites suivantes en fonction de n.

1. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $2a_{n+2} + a_{n+1} - a_n = 0$, $\forall n \geqslant 0$. Calculer $\sum\limits_{i=0}^{2023} a_i$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0$ avec $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $4u_{n+2} - 12u_{n+1} + 9u_n = 0$, et $u_0 = 1$, $u_1 = -1$.

Exercice 3 (Point fixe)**.** Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2u_n - 1}$ et $u_0 = 3$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$ puis déterminer la monotonie de la suite u.
2. Justifier la convergence de la suite u et expliciter sa limite.

Exercice 4 (Suites adjacentes)**.** Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites u et v par : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et $\forall n \geqslant 0$ $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $0 < u_n < v_n$ puis donner la monotonie des suites u et v
2. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $\quad 0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{v_n - u_n}{2}$ puis $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \dfrac{v_0 - u_0}{2^n}$.
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n)$.
3. Déduire des questions précédentes que les deux suites sont convergentes.
4. Montrer que la suite $(u_n v_n)$ est constante.
   En déduire la limite commune des suites u et v.

Exercice 5 (Suite implicite « simple »)**.** On note (E_n) l'équation (E_n) : $\dfrac{x^3}{x^2+1} = n$

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, l'équation (E_n) possède une unique solution, notée x_n, sur $\mathbb{R}$.
   Donner la valeur de x_0.
2. Quelle est la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\quad n \leqslant x_n \leqslant n+1$
4. En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner un équivalent.

Exercice 6 (Suite implicite « dure »)**.** On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n par : $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une et une seule solution strictement positive, qu'on note u_n.
2. Calculer u_1 et u_2, puis vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]0; \dfrac{2}{3}\right[$.
3. Montrer que : $\forall x \in]0;1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   Que peut-on en déduire concernant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, vers une limite qu'on notera ℓ.
5. Déterminer la limite de u_n^n et en déduire la valeur de ℓ.

Exercice 7 (IAF)**.** Soit la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}(3 + u_n^2)$. On pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{5}(3 + x^2)$.

1. (a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,1]$ et montrer que $[0,1]$ est un intervalle stable par f.
   (b) Déterminer l'unique point fixe $r \in [0,1]$ de f.
   (c) Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $\quad \left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{2}{5}$.
2. (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $u_n \in [0,1]$.
   (b) Démontrer que $\forall n \geqslant 0$, $\quad |u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{2}{5}|u_n - r|$ puis $|u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
   (c) Expliciter un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\quad |u_n - r| \leqslant 10^{-10}$.
   (d) En déduire une valeur approchée à 10^{-10} près de r.

Exercice 8 (Équivalents)**.** Déterminer, sous réserve d'existence, un équivalent puis la limite de chacune des suites suivantes

1. $u_n = -2n^2 + 7n + 3$
2. $u_n = n - \dfrac{3}{n^5}$
3. $u_n = \dfrac{3n^2 + 2n - 5}{-4n^2 + 3n - 8}$
4. $u_n = 1,1^n - n^{92} + e^{-n}$
5. $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n - \sqrt{n}$
6. $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \times \sqrt{n}$
7. $u_n = \dfrac{3n^2 + 2^n - 5^n}{\ln(n) - 4n^2 + 3^n}$
8. $u_n = \sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}$
9. $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$
10. $u_n = n \ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$

Exercice 9.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 \leqslant u_n \leqslant n^2 + n + 1$. Déterminer la limite et un équivalent de u_n.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. Déterminer la limite de nv_n, en déduire un équivalent de v_n puis sa limite.

LYCÉE PAUL CÉZANNE

CLASSE PRÉPARATOIRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE, VOIE GÉNÉRALE

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

TRAVAIL ESTIVAL 2023

Durant cette pause estivale, il est important de ne pas arrêter complètement de travailler : la seconde année est très courte, les concours démarrent mi-avril et les cours cessent fin mars. Il faut profiter de l'été sans nouvelles notions à apprendre pour consolider vos acquis de première année, en rédigeant des fiches méthodes, tout en retravaillant les devoirs et leurs corrections. Ceci concerne chaque chapitre, y compris le programme d'informatique. Je vous conseille de travailler extrêmement sérieusement le cours : toutes les définitions et tous les théorèmes de première année doivent être sus, y compris les démonstrations que vous avez eues en colle, les techniques étant souvent utiles pour répondre à certains questions dans les sujets de concours. Je vous rappelle que le programme des concours porte sur les deux années, et que les techniques de première année doivent être suffisamment maîtrisées pour envisager sereinement d'acquérir celles de seconde année, même si nous reviendrons largement ensemble sur le programme de première année au travers des exercices.

Durant cette période estivale, vous devez travailler le dernier chapitre étudié au mois de juin (intégrales sur un intervalle) qui constituera la majeure partie du premier programme de colle. Des exercices sont à préparer, ils seront corrigés en classe. Vous devez également commencer à travailler le premier chapitre consacré aux couples de variables aléatoire discrètes. Quelques définitions spécifiques sont à connaître, mais les techniques mises en œuvre reposent sur des calculs de probabilités, à l'aide de la formule des probabilités composées ou des probabilités totales. Nous reviendrons ensemble sur ce chapitre. Les exercices 1, 2 et 3 de la fiche associées sont à préparer, en vous aidant du cours.

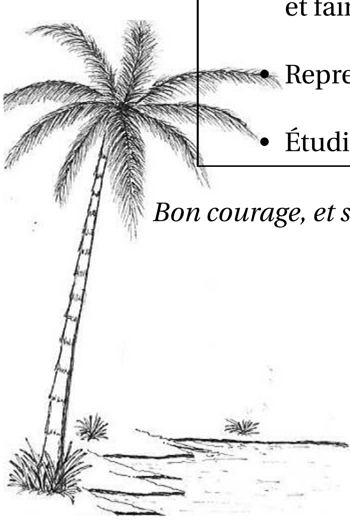
Un premier devoir surveillé de 4h aura lieu le mercredi 13 septembre, et sera composé d'exercices tirés des trois derniers devoirs surveillés de ECG1.

En résumé, voici le travail à faire :

- Revoir les définitions et théorèmes importants (ainsi que leur démonstration) de chaque chapitre du cours de 1re année (grâce notamment aux programmes de colles) et faire des fiches méthodes, en vous aidant de la liste de questions fournie

- Reprendre les devoirs surveillés et leur correction

- Étudier les exercices sur les intégrales sur un intervalle, et le premier chapitre.



Bon courage, et soyez dès à présent sérieux et motivés.

P.-A. GIÉ
pa.gie at live.fr (remplacer at par @)

Lien cliquable vers le padlet ECG2 Mathématiques Approfondies

LISTE (NON EXHAUSTIVE) DE QUESTIONS POUR LA CONSTITUTION DE FICHES MÉTHODE

1 Analyse

1.1 Fonctions

☞ Comment montrer une inégalité ou un encadrement ?
(opérations élémentaires, croissance ou décroissance des fonctions, étude des variations de la fonction définie par la différence, inégalité des accroissements finis.)

☞ Comment calculer une limite ?
(est-ce une forme indéterminée ?, peut-on utiliser les croissances comparées, ou les équivalents, ou un développement limité pour ensuite simplifier et lever la forme indéterminée ?)

☞ Comment montrer qu'une fonction est continue ?
(par sommes, produits, quotients, composées si c'est sur un intervalle, par un calcul de limite si c'est en un point).

☞ Comment montrer qu'une fonction est dérivable ?
(par sommes, produits, quotients, composées si c'est sur un intervalle, par un calcul de la limite du taux d'accroissement si c'est en un point).

☞ Comment montrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$?
(par sommes, produits, quotients, composées si c'est sur un intervalle, ou en regardant attentivement si f' est continue si f est définie par morceaux).

☞ Comment calculer une dérivée ?
(ne pas se tromper sur les formules pour les produits, quotients, composées, et les fonctions de référence.)

☞ Comment montrer qu'une fonction est (strictement) croissante ou décroissante ?
(calcul de la dérivée qui doit être strictement positive ou négative sauf éventuellement en quelques points, ou composition de fonctions strictement croissantes ou décroissantes, en respectant la règle des signes (croissante = +, décroissante = -) Ainsi, la composée de trois fonctions décroissantes sera décroissante, la composée d'une croissante et d'une décroissante sera décroissante. Ne pas confondre composition et somme : $\ln(2x-3)$ est une composée, mais $\ln(x)+2x-3$ est une somme)

☞ Comment montrer qu'une fonction est bijective ?
(stricte monotonie et continuité sur un intervalle, calcul des limites pour l'intervalle image)

☞ Comment montrer qu'une fonction admet un point fixe ?
(résolution de l'équation $f(x)=x$ si on peut, ou $g(x)=f(x)-x$ bijective puis 0 admet un unique antécédent par g).

☞ Quelles sont les propriétés de la bijection réciproque ?
(même monotonie que f, même continuité, mais pas même dérivabilité : pas en $y=f(x)$ si $f'(x)=0$).

☞ Comment étudier la convexité ?
(signe de la dérivée seconde quand la fonction est $\mathscr{C}^2$)

☞ Reconnaître et résoudre une équation différentielle ?

☞ Comment calculer un DL et à quoi ça sert ?
(si on a une forme indéterminée dans un quotient, souvent $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ avec une somme au numérateur, on ne peut pas utiliser les équivalents. On fait donc un DL, en se ramenant à une ou plusieurs des formules de référence : $\ln(1+u)$, e^u et $(1+u)^\alpha$ avec u qui tend vers 0, ou une fonction $u=u(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers…)

1.2 Suites

☞ Comment montrer qu'une suite est monotone ?

(signe de $u_{n+1}-u_n$, comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si $u_n>0$, récurrence, méthode spécifique aux suites implicites en comparant $f_n(u_n)$ et $f_n(u_{n+1})$)

☞ Comment montrer qu'une suite est arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique ?

(en exprimant u_{n+1} en fonction de u_n)

☞ Comment montrer qu'une suite est récurrente linéaire d'ordre 2 ?

(en exprimant u_{n+2} comme combinaison linéaire de u_n et u_{n+1})

☞ Comment déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique ?

(en étudiant une suite associée $v_n = u_n - \lambda$)

☞ Comment déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ?

(en résolvant l'équation caractéristique et en cherchant λ et μ tels que $u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$ ou $u_n = (\lambda+\mu n)q^n$ suivant le nombre de racines)

☞ Comment montrer qu'une suite est convergente ?

(calcul direct de la limite, théorème de convergence monotone, théorème des gendarmes, théorème des suites adjacentes)

☞ Comment montrer qu'une suite est divergente ?

(calcul direct de la limite $\pm\infty$, théorèmes de minoration, suite croissante non majorée ou suite décroissante non minorée)

☞ Comment calculer la limite réelle d'une suite ?

(calcul direct, ou théorème des gendarmes, ou théorème du point fixe si $u_{n+1} = f(u_n)$ et qu'on sait que (u_n) est convergente.)

☞ Comment trouver un équivalent ?

(termes à négliger dans une somme, quotient qui tend vers 1, opérations licites sur les équivalents usuels, développement limité, utilisation du théorème des gendarmes avec un quotient au milieu et les membres de gauche et droite qui tendent vers 1.)

☞ Comment reconnaître une suite implicite et comment l'étudier ?

(une suite est implicite quand les termes sont définis comme des solutions d'une équation avec une fonction f ou une famille de fonctions f_n dépendant d'un entier n. Pour l'étudier, toujours revenir à la définition en appliquant la fonction f).

1.3 Séries

☞ Quelles sont les séries convergentes de référence ?

(séries géométriques $\sum_{k\geqslant 0} q^k$, géométriques dérivées $\sum_{k\geqslant 0} kq^{k-1}$, géométriques dérivées secondes $\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)q^{k-2}$ avec $|q|<1$, séries exponentielles $\sum_{k\geqslant 0}\frac{x^k}{k!}$ avec $x\in\mathbb{R}$, séries de Riemann $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha>1$)

☞ Qu'est-ce qu'une série télescopique ?

(Quand on peut simplifier presque tous les termes en calculant la somme partielle $S_N = \sum_{k=0}^{N}$)

☞ Comment prouver qu'une série converge ?

(Retour à la définition en posant la somme partielle $S_N = \sum_{k=0}^{N}$, en se ramenant à des séries de références, en montrant que S_N a une limite réelle, en comparant le terme général positif de la série à un terme général de série de référence par l'un des critères)

☞ Comment prouver qu'une série diverge?
(La suite des sommes partielles tend vers $\pm\infty$ ou n'a pas de limite, ou séries géométriques (dérivées...) avec $q \leqslant -1$ ou $q \leqslant 1$, ou séries de Riemann avec $\alpha \leqslant 1$, ou le terme général ne tend pas vers 0.)

☞ Comment calculer la somme d'une série?
(À l'aide des formules des séries géométriques : $\frac{1}{1-q}$, $\frac{1}{(1-q)^2}$, $\frac{2}{(1-q)^3}$ ou exponentielles : e^x, et en faisant attention à l'indice de départ des sommes. Ou en calculant directement la limite de la suite des sommes partielles, par exemple quand la série est télescopique)

☞ Comment prouver qu'une série converge absolument et à quoi ça sert?
(Montrer que la série $\sum |u_k|$ converge, et si c'est le cas, alors la série $\sum u_k$ converge également. Ça sert quand u_k n'est pas toujours positif car les critères de convergence s'appliquent uniquement aux séries à termes positifs).

☞ Quels sont les critères de convergence/divergence?
(uniquement pour des séries à termes positifs : les sommes partielles sont majorées, ou critère par majoration/équivalents/négligeables. Attention, les critères par majoration/négligeables sont assymétriques, alors que le critère par équivalents donne des séries de même nature. Ces critères ne donnent aucun renseignement sur la somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}$ des séries.)

1.4 Intégrales

☞ Comment montrer qu'une intégrale est convergente?
(est-elle vraiment impropre?, calcul direct en posant y, critères de convergence pour les fonctions positives, avec les intégrales de référence.)

☞ comment calculer une intégrale grâce à une primitive?
(reconnaître $u'u^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$, $\frac{u'}{u}$ ou $u'e^u$, en rajoutant des constantes multiplicatives si besoin)

☞ Comment faire une intégration par parties? dans une intégrale impropre?
(formule toujours sur un segment, attention au cas ln × polynôme ou polynôme × exponentielle)

☞ Comment faire un changement de variable? dans une intégrale impropre?
(changer : les bornes, le dt, et la variable. si non affine, sur un segment)

☞ Comment étudier une fonction définie par une intégrale $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$?
(penser à utiliser une primitive inconnue F de f)

☞ Comment étudier une suites d'intégrales?
(définition : impropre ou non, monotonie et encadrement avec théorème de positivité)

2 Algèbre

2.1 Calculs matriciels

☞ Comment calculer les puissances d'une matrice carrée?
(Par récurrence, avec la formule du binôme si c'est une somme de deux matrices qui commutent, avec des suites (a_n) et (b_n) si on a une expression du genre $A^n = a_n A + b_n I$)

☞ Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée?
(opérations élémentaires sur les lignes de la matrice et sur les lignes de la matrice identité, ou résoudre le système $P\begin{pmatrix} x \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \end{pmatrix}$)

- ☞ Si $A = PDP^{-1}$, comment faire la récurrence pour avoir $A^n = PD^nP^{-1}$?
  (...)

2.2 Espaces vectoriels

- ☞ Comment montrer qu'un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel ?
  (Par caractérisation abstraite ou en exhibant une famille génératrice)
- ☞ Comment montrer qu'une famille de vecteurs est génératrice d'un espace vectoriel ? Notation Vect(...)
  (tout autre vecteur doit se décomposer comme combinaison linéaire de la famille)
- ☞ Comment montrer qu'une famille de vecteurs est libre ?
  (pas de combinaison linéaire autre qu'avec des réels tous nuls)
- ☞ Comment montrer qu'une famille de vecteurs est une base d'une espace vectoriel ?
  (libre et génératrice)
- ☞ Comment montrer qu'une famille de n vecteurs est une base dans un espace vectoriel de dimension connue n ?
  (libre ou génératrice, en pratique, libre est plus simple à prouver)
- ☞ Comment calculer le rang d'une famille de vecteurs ?
  (dimension du sous-espace vectoriel engendré Vect(...), appauvrissement de famille génératrice si elle est liée)
- ☞ Quelles sont les bases canoniques et dimensions des espaces vectoriels usuels $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$?
  (la dimension correspond en réalité au nombre de réels (lettres...) nécessaires pour écrire un vecteur d'un des espaces vectoriels)
- ☞ Comment montrer qu'une somme $F+G$ de sous-espaces vectoriels F et G est directe ($F+G = F\oplus G$) ?
  (dimensions avec la formule de Grassmann, intersection réduite au vecteur nul, unicité de la décomposition en somme pour chaque vecteur)
- ☞ Comment déterminer une famille génératrice de $F+G$? une base ?
  (concaténation de bases, test de liberté)

2.3 Applications linéaires

- ☞ Comment montrer qu'une application entre deux espaces vectoriels est linéaire ?
  (Montrer l'égalité : $f(\alpha\vec{u}+\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.)
- ☞ Comment montrer qu'une application entre deux espaces vectoriels est un endomorphisme ?
  (linéaire + les espaces de départ et d'arrivée sont les mêmes)
- ☞ Comment trouver le noyau d'une application linéaire ?
  (chercher les antécédents du vecteur nul de l'espace vectoriel d'arrivée)
- ☞ À quoi sert le noyau d'une application linéaire
  (s'il est réduit au vecteur nul, l'application linéaire est injective. si, de plus, c'est un endomorphisme, elle est directement bijective, donc un automorphisme)
- ☞ Comment trouver l'image d'une application linéaire ?
  (une famille génératrice est donnée par les images $(f(\vec{e}_1),\dots,f(\vec{e}_p))$ d'une base $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p)$ de l'espace vectoriel de départ. Ensuite, on regarde si cette famille est libre pour avoir une base)
- ☞ Qu'est-ce que le rang d'une application linéaire, et à quoi sert-il ?
  (dimension de $\mathrm{Im}(f)$, et s'il est égal à la dimension de l'espace vectoriel d'arrivée, l'application linéaire est surjective)

☞ Qu-est-ce que le théorème du rang ?
(égalité reliant la dimension de l'espace vectoriel de départ, la dimension du noyau et la dimension de l'image de f)

☞ Comment trouver la matrice d'une application linéaire ?
(exprimer les images $(f(\vec{e}_1),\dots,f(\vec{e}_p))$ d'une base $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p)$ de l'espace vectoriel de départ en fonction d'une base de l'espace vectoriel d'arrivée. On écrit les coordonnées correspondant à chaque vecteur $f(\vec{e}_j)$ en colonne.)

☞ À quoi sert la matrice d'une application linéaire ?
(faire des calculs plus simplement, lire une base de $\mathrm{Im}(f)$ en regardant les colonnes, savoir si l'application linéaire est un isomorphisme lorsque la matrice est inversible)

☞ Comment montrer qu'un endomorphisme est un projecteur ?

3 Probabilités discrètes

☞ Comment calculer la probabilité d'un événement par dénombrement ?
(s'il y a équiprobabilité et modèle de tirages simultanés, en calculant des combinaisons $\binom{n}{p}$)

☞ Comment calculer la probabilité d'une réunion d'événements ?
(formule du crible si l'union est finie, et si l'union est infinie, voir si les événements sont 2 à 2 incompatibles, ou si la famille est croissante)

☞ Comment calculer la probabilité d'une intersection d'événements ?
(formule des probabilités composées avec probabilités conditionnelles si l'intersection est finie, produit des probabilités en cas d'indépendance)

☞ Comment écrire la formule des probabilités totales avec un système complet d'événements fini ou infini ?
($P(B) = \sum\limits_k P(A_k \cap B) = \sum\limits_k P(A_k)P_{A_k}(B)$ pour des événements)
($P(Y=y) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} P([X=x]\cap[Y=y]) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} P(X=x)P_{[X=x]}(Y=y)$ avec des variables aléatoires)

☞ Comment calculer des probabilités conditionnelles en interprétant les données écrites dans l'énoncé ?
(Si… alors… dans un énoncé d'exercice de probabilité donne souvent une probabilité conditionnelle)

☞ Comment calculer l'espérance d'une variable aléatoire discrète ?
(convergence absolue de la série $\sum\limits_{k\in X(\Omega)} kP(X=k)$ puis calcul de la somme de cette série)

☞ Comment calculer la variance d'une variable aléatoire discrète ?
(existence par convergence absolue de la série $\sum\limits_{k\in X(\Omega)} k^2P(X=k)$ ou $\sum\limits_{k\in X(\Omega)} k(k-1)P(X=k)$, puis formules de linéarité de l'espérance et de Kœnig-Huygens)

☞ Comment appliquer le théorème du transfert ?
(voir l'analogie avec l'espérance de X^2 pour savoir calculer $E(X(X-1))$, $E(2^X)\dots$)

☞ Comment reconnaître une loi usuelle ?
(par le modèle expérimental pour les lois de Bernoulli, binomiales, géométriques, ou par le calcul du support et de la loi de probabilité)

☞ Comment calculer la fonction de répartition à partir de la loi de probabilité ?
($\forall x\in\mathbb{R}$, $F_X(x) = P(X \leqslant x)$)

☞ Comment déterminer la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition ?
($P(X=k) = F_X(k) - F_X(k-1)$)

Exercices supplémentaires

Intégrales

Exercice 3.1.

1. (a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x^n e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$ est convergente.

2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2}\,dt$ converge.

   On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$ et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$.

3. (a) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n$.

   (b) Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p+1} = 0$.

   (c) Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\,p!}\sqrt{\pi}$.

Exercice 3.2.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\,dt$ converge.

2. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 0$, $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^k \ln(t)\,dt$ existe et donner sa valeur.

3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt - \int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{t^2-1}\,dt.$$

4. Calculer la limite de $t \mapsto \dfrac{t^2\ln(t)}{t^2-1}$ en 0 et en 1. En déduire qu'il existe une constante $M > 0$, qu'on ne cherchera pas à calculer, telle que, pour tout $t \in]0,1[$, $\left|\dfrac{t^2\ln(t)}{t^2-1}\right| \leqslant M$.

5. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{t^2-1}\,dt = 0$ puis que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Chapitre I - Couples de variables aléatoires discrètes

Table des matières

1 Couples de variables aléatoires discrètes

1.1 Loi conjointe

Loi conjointe ou loi du couple

Définition 1.1. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On appelle **loi conjointe** ou **loi du couple** (X, Y) la donnée :

- des supports $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_j, \dots\}$ (ensembles finis ou infinis) ;
- des probabilités $p_{ij} = P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big)$ pour tout $x_i \in X(\Omega)$ et $y_j \in Y(\Omega)$.

Remarque 1.2. Si X et Y sont des variables aléatoires finies, de support respectif $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, on peut présenter les résultats sous forme d'un tableau :

(X,Y)	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}

Remarque 1.3. La loi conjointe du couple (X, Y) est une loi de probabilité, on a donc $p_{ij} \geqslant 0$ pour tous i et j tels que $x_i \in X(\Omega)$ et $y_j \in Y(\Omega)$, et :

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} \left(\sum_{y_j \in Y(\Omega)} p_{ij} \right) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} \left(\sum_{x_i \in X(\Omega)} p_{ij} \right) = 1$$

ces sommes étant des sommes finies ou des sommes de séries.

Méthode : Obtention de la loi conjointe

Pour donner la loi conjointe, il faut donc calculer les probabilités $P\big([X = x] \cap [Y = y]\big)$ pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$. Il y a plusieurs méthodes :

$\boxed{\text{C1}}$ si la situation est l'équiprobabilité et si X et Y sont finies, on peut procéder par dénombrement, en comptant le nombre d'issues réalisées par l'événement $[X = x] \cap [Y = y]$ puis en divisant par le nombre total d'issues $\mathrm{Card}(\Omega)$;

$\boxed{\text{C2}}$ sinon, on peut utiliser les probabilités conditionnelles :

$$P\big([X = x] \cap [Y = y]\big) = P(X = x) P_{[X=x]}(Y = y)$$

si on connaît la loi de X, ou :

$$P\big([X = x] \cap [Y = y]\big) = P(Y = y_j) P_{[Y=y]}(X = x)$$

si on connaît la loi de Y.

Exemple 1.4. On lance deux dés équilibrés à 4 faces. On note X le maximum des deux résultats et Y le minimum. Donnons la loi du couple (X,Y).
On a déjà $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1,4]\!]$. Puis :


- $P\big([X=1]\cap[Y=2]\big) = 0$ car X est le maximum et Y le minimum des deux dés, donc $X \geqslant Y$. De manière générale, $P\big([X=i]\cap[Y=j]\big) = 0$ si $1 \leqslant i < j \leqslant 4$.
- $P\big([X=1]\cap[Y=1]\big) = \frac{1}{16}$ car seul le couple de résultats $(1,1)$ répond à l'événement, sur 16 couples possibles. De manière générale, $P\big([X=i]\cap[Y=i]\big) = \frac{1}{16}$ pour tout $i \in [\![1,4]\!]$.
- $P\big([X=2]\cap[Y=1]\big) = \frac{2}{16}$ car les deux couples de résultats $(1,2)$ et $(2,1)$ répondent à l'événement, sur 16 couples possibles. De manière générale, $P\big([X=i]\cap[Y=j]\big) = \frac{2}{16}$ si $1 \leqslant j < i \leqslant 4$.

On obtient donc le tableau ci-contre pour la loi conjointe de X et Y :

(X,Y)	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	0	0	0
2	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0
3	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0
4	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Simulation informatique :

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def maxi_mini():
    lancer=rd.randint(1,5,2)
    # on obtient deux entiers dans [[1,5[[ selon la loi uniforme
    x=np.max(lancer)
    y=np.min(lancer)
    res=np.array([x,y])
    return(res)

N=10000
Simu=np.zeros([4,4])
for i in range(1,N+1):
    a=maxi_mini()-1
    # les index démarrent à 0 pour les lignes et les colonnes des tableaux
    Simu[a[0],a[1]]=Simu[a[0],a[1]]+1
Simu=Simu/N
print(Simu)
```

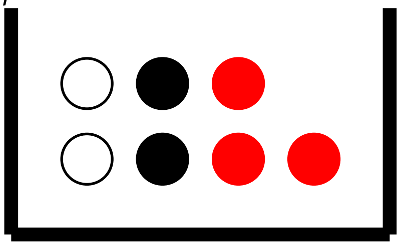
On obtient par exemple, pour deux lancers :

```
maxi_mini()
Out[66]: array([2, 1])

maxi_mini()
Out[67]: array([4, 1])
```

Puis, pour deux séries de 10 000 lancers :

```
[[0.0597 0.     0.     0.    ]
 [0.1242 0.0619 0.     0.    ]
 [0.1253 0.1302 0.0669 0.    ]
 [0.1268 0.1217 0.1209 0.0624]]

[[0.0615 0.     0.     0.    ]
 [0.1246 0.0569 0.     0.    ]
 [0.1295 0.1223 0.0615 0.    ]
 [0.1229 0.1269 0.1295 0.0644]]
```

Exemple 1.5.



On dispose d'une urne avec 2 boules blanches, 2 boules noires et 3 boules rouges. On tire simultanément 3 boules de cette urne. On note X le nombre de rouges tirées et Y le nombre de noires. Donnons la loi du couple (X, Y).

On a déjà $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,2]\!]$. Puis, pour tous $i \in [\![0,3]\!]$ et $j \in [\![0,2]\!]$:

$$P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = \frac{\binom{3}{i}\binom{2}{j}\binom{2}{3-i-j}}{\binom{7}{3}}.$$

En effet, les tirages sont simultanés et il y a $\binom{7}{3} = 35$ tirages possibles. On prélève i boules parmi les 3 rouges, j boules parmi les 2 noires, et le restant, soit $3 - i - j$ boules parmi les 2 blanches avec pour convention $\binom{p}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > p$.
On obtient donc le tableau suivant pour la loi conjointe de X et Y :

(X, Y)	0	1	2
0	0	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{3}{35}$
2	$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{35}$	0
3	$\frac{1}{35}$	0	0

Exemple 1.6. On dispose d'un sac contenant 6 jetons dont 2 sont rouges dans lequel on prélève simultanément 3 jetons. Si on a obtenu k jetons rouges dans le tirage, on lance k fois une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut $\frac{3}{5}$.
On note X le nombre de boules rouges contenues dans le tirage et Y le nombre de piles obtenu lors des lancers.
On a déjà : $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0,2]\!]$. La loi de probabilité de X peut être calculée directement :

$$\forall i \in [\![0,2]\!], \quad P(X = i) = \frac{\binom{2}{i}\binom{4}{3-i}}{\binom{6}{3}}$$

i	0	1	2
$P(X = i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Calculons maintenant les probabilités du couple (X,Y) :

- On a $X \geqslant Y$ car on lance X fois la pièce donc le nombre Y de piles est inférieur ou égal au nombre X de lancers. Donc : $P\big([X=i]\cap[Y=j]\big)=0$ si $0\leqslant i<j\leqslant 2$.
- Si $0\leqslant j\leqslant i\leqslant 2$, on peut utiliser la loi de X avec les probabilités conditionnelles :

$$P\big([X=i]\cap[Y=j]\big)=P(X=i)P_{[X=i]}(Y=j)=P(X=i)\binom{i}{j}\left(\frac{3}{5}\right)^j\left(\frac{2}{5}\right)^{i-j}$$

On obtient donc le tableau suivant pour la loi conjointe de X et Y :

$(X;Y)$	0	1	2
0	$\frac{1}{5}$	0	0
1	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$	0
2	$\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{125}$	$\frac{1}{5}\cdot 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{12}{125}$	$\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{125}$

Exemple 1.7. On lance une pièce une infinité de fois. On note $p\in]0;1[$ (et $q=1-p$) la probabilité d'obtenir pile. Soit X le rang du premier pile et Y le rang du deuxième pile. Donner la loi conjointe de X et Y puis vérifier qu'on a bien une loi de probabilité.

On a $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega)=\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$.
Soit $i,j\in\mathbb{N}$, $i\geqslant 1$ et $j\geqslant 2$. On a nécessairement $X<Y$, donc :

$$\text{si } i\geqslant j,\ p_{i,j}=P\big([X=i]\cap[Y=j]\big)=0.$$

Et :

$$\text{si } i<j,\ p_{i,j}=P\big([X=i]\cap[Y=j]\big)=q^{i-1}pq^{j-i-1}p=p^2q^{j-2}.$$

En effet, l'événement $[X=i]\cap[Y=j]$ nécessite j lancers, où l'on a obtenu Pile exactement au i^{e} et au j^{e} lancers, et Face le reste du temps. Cet événement est donc réalisé par la suite de résultats des lancers indépendants :

$$\underbrace{F_1\cap\ldots\cap F_{i-1}}_{i-1 \text{ fois}}\cap P_i\cap\underbrace{F_{i+1}\cap\ldots\cap F_{j-1}}_{j-i-1\text{ fois}}\cap P_j.$$

Montrons que $\sum\limits_{\substack{i\geqslant 1\\ j\geqslant 2}}p_{i,j}=1$. Or :

$$\sum_{\substack{i\geqslant 1\\ j\geqslant 2}}p_{i,j}=\sum_{j=2}^{+\infty}\sum_{i=1}^{j-1}p^2q^{j-2}=p^2\sum_{j=2}^{+\infty}(j-1)q^{j-2}=p^2\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}=p^2\frac{1}{(1-q)^2}=1.$$

(On a reconnu une série géométrique dérivée première de raison $q\in]0;1[$ donc convergente).

1.2 Lois marginales

Si l'on connaît la loi du couple (X,Y), on peut en déduire les lois de X et Y, appelées **lois marginales**, grâce à la **formule des probabilités totales**.

Lois marginales

Théorème-Définition 1.8. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes. On a alors :

$$\boxed{\forall x \in X(\Omega),\ P\big(X=x\big) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P\big([X=x]\cap[Y=y]\big)}$$

La loi de X est appelée **première loi marginale** du couple (X,Y).

$$\boxed{\forall y \in Y(\Omega),\ P\big(Y=y\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} P\big([X=x]\cap[Y=y]\big)}$$

La loi de Y est appelée **seconde loi marginale** du couple (X,Y).

Démonstration. La première propriété résulte du fait que la famille $\{[Y=y],\ y\in Y(\Omega)\}$ forme un système complet d'événements, et la seconde du fait que la famille $\{[X=x],\ x\in X(\Omega)\}$ forme également un système complet d'événements. On applique alors la formule des probabilités totales. □

Remarque 1.9. Dans le cas fini, $P(Y=y_1)$ est la somme de la première colonne du tableau donnant la loi conjointe. De même pour $P(Y=y_j)$ avec $j\geqslant 1$, et pour $P(X=x_i)$ (avec $i\geqslant 1$) qui est la somme de la i-ème ligne du tableau donnant la loi conjointe.
On peut compléter le tableau de la façon suivante :

(X,Y)	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	Somme
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	$P(X=x_1)$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	$P(X=x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	$P(X=x_n)$
Somme	$P(Y=y_1)$	$P(Y=y_2)$	$\cdots$	$P(Y=y_m)$	1

Exemple 1.10. Dans l'exemple 1.4, on obtient les lois marginales :

(X,Y)	1	2	3	4	Somme
1	$\frac{1}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{3}{16}$
3	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{5}{16}$
4	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$
Somme	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

i	1	2	3	4
$P(X=i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

j	1	2	3	4
$P(Y=j)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

Exemple 1.11. Dans l'exemple 1.5, on obtient les lois marginales :

(X,Y)	0	1	2	Somme
0	0	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{4}{35}$
1	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{18}{35}$
2	$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{35}$	0	$\frac{12}{35}$
3	$\frac{1}{35}$	0	0	$\frac{1}{35}$
Somme	$\frac{10}{35}$	$\frac{20}{35}$	$\frac{5}{35}$	1

i	0	1	2	3
$P(X=i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

j	0	1	2
$P(Y=j)$	$\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$	$\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$	$\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$

Exemple 1.12. Dans l'exemple 1.6, on obtient la loi marginale de Y :

j	0	1	2
$P(Y=j)$	$\frac{1}{5}+\frac{6}{25}+\frac{4}{125}=\frac{59}{125}$	$0+\frac{9}{25}+\frac{12}{125}=\frac{57}{125}$	$0+0+\frac{9}{125}=\frac{9}{125}$

Exemple 1.13. Dans l'exemple 1.7, les lois marginales sont données par la formule des probabilités totales. On obtient :

- Pour $i \geqslant 1$:

$$P(X=i)=\sum_{j=2}^{+\infty} P\big([X=i]\cap[Y=j]\big)=\sum_{j=i+1}^{+\infty} p^2q^{j-2} \underbrace{=}_{k=j-i-1} p^2\sum_{k=0}^{+\infty} q^{k+i-1}=p^2q^{i-1}\sum_{k=0}^{+\infty} q^k=\frac{p^2q^{i-1}}{1-q}=pq^{i-1}.$$

Ce n'est pas une surprise, car X suit la loi géométrique de paramètre p (rang du premier succès dans une répétition d'une infinité d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, et dont le succès « obtenir Pile » a pour probabilité p.)

- Pour $j \geqslant 2$:

$$P(Y=j)=\sum_{i=1}^{+\infty} P\big([X=i]\cap[Y=j]\big)=\sum_{i=1}^{j-1} p^2q^{j-2}=(j-1)p^2q^{j-2}.$$

1.3 Lois conditionnelles

Lois conditionnelles

Définition 1.14. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$.

- Soit $y \in Y(\Omega)$ fixé. La **loi conditionnelle** de X sachant $[Y=y]$ est définie par :

$$\boxed{\forall x \in X(\Omega),\quad P_{[Y=y]}\big(X=x\big)=\frac{P\big([X=x]\cap[Y=y]\big)}{P\big([Y=y]\big)}}$$

- Soit $x \in X(\Omega)$ fixé. La **loi conditionnelle** de Y sachant $[X=x]$ est définie par :

$$\boxed{\forall y \in Y(\Omega),\quad P_{[X=x]}\big(Y=y\big)=\frac{P\big([X=x]\cap[Y=y]\big)}{P\big(X=x\big)}}$$

Dans les exercices on pourra utiliser cette relation pour trouver la loi conjointe si on a un moyen simple de connaître la loi conditionnelle.

Exemple 1.15. Dans l'exemple 1.5, la loi conditionnelle de X sachant $[Y=1]$ est donnée par le tableau :

i	0	1	2	3
$P_{[Y=1]}(X=i)$	$\dfrac{\frac{2}{35}}{\frac{20}{35}}=\frac{1}{10}$	$\dfrac{\frac{12}{35}}{\frac{20}{35}}=\frac{3}{5}$	$\dfrac{\frac{6}{35}}{\frac{20}{35}}=\frac{3}{10}$	0

Exemple 1.16. Dans l'exemple 1.6, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=i]$ est une binomiale de paramètres i et $\frac{3}{5}$. En effet, si $[X=i]$, alors on lance i fois la même pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut $\frac{3}{5}$, et Y désigne le nombre de piles obtenus.
En revanche, la loi de Y n'est pas binomiale.

1.4 Indépendance d'un couple ou d'une famille de variables aléatoires discrètes

Couple de variables aléatoires discrètes indépendantes

Définition 1.17. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque, pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, on a :

$$P\big([X = x] \cap [Y = y]\big) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

Remarque 1.18.

- Deux variables aléatoires X et Y sont donc indépendantes si les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont indépendants, pour toutes valeurs de x et y prises par X et Y respectivement.
- Si deux variables aléatoires sont issues d'expériences n'influant pas l'une sur l'autre, alors elles sont indépendantes.

Variables aléatoires indépendantes

Proposition 1.19. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Si f et g sont deux fonctions définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont encore indépendantes.
2. $P\big([X \in A] \cap [Y \in B]\big) = P(X \in A)P(Y \in B)$ pour toute partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$.

Preuve. Admis. □

Exemple 1.20. Si X et Y sont indépendantes, alors X^2 et Y , X^2 et Y^2, ... sont indépendantes. Et d'autre part, $P\big([X \geqslant 3] \cap [Y \leqslant 6]\big) = P(X \geqslant 3) \times P(Y \leqslant 6)\ldots$

Méthode : Loi conjointe de deux variables aléatoires discrètes indépendantes

Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, on peut obtenir la loi conjointe du couple (X, Y) à partir des deux lois de X et Y en multipliant les probabilités.
Réciproquement, on peut voir dans le tableau ou avec la loi conjointe et les lois de X et Y si les variables aléatoires sont indépendantes.

Exemple 1.21. Il y a indépendance si l'on répète la même expérience sans changer les conditions. Par exemple, pour le lancer d'un même dé équilibré deux fois de suite, si X est le numéro du premier lancer et Y le numéro du second, alors X et Y sont indépendantes. En effet :

$$P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = P(X = i)P(Y = j)$$

pour tout couple $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2$.

Exemple 1.22. Dans l'exemple 1.5, X et Y ne sont pas indépendantes. En effet, d'après le tableau de la loi conjointe obtenu, on a :

$$P\big([X = 0] \cap [Y = 0]\big) = 0 \neq \frac{4}{35} \times \frac{10}{35} = P(X = 0)P(Y = 0).$$

Méthode : Comment montrer que X et Y sont ou ne sont pas indépendantes

Pour montrer que X et Y sont indépendantes :

I1 cela se voit avec l'expérience aléatoire et la définition de X et Y ;

I2 on montre que pour tout $x \in X(\Omega)$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$, les réels $P\big([X = x] \cap [Y = y]\big)$ et $P(X = x)P(Y = y)$ sont égaux.

Pour montrer que X et Y ne sont pas indépendantes :

NI on trouve une valeur $x \in X(\Omega)$ et une valeur $y \in Y(\Omega)$ telles que les réels $P\big([X = x] \cap [Y = y]\big)$ et $P(X = x)P(Y = y)$ ne sont pas égaux (penser aux zéros dans la loi conjointe) ;

Famille finie de variables aléatoires discrètes (mutuellement) indépendantes

Définition 1.23. On dit que les variables aléatoires discrètes $X_1, X_2, \dots, X_n$ définies sur le même espace probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont **(mutuellement) indépendantes** si, et seulement si, pour toute liste de valeurs $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ prises par $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, on a :

$$P\big([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2] \cap \dots \cap [X_n = x_n]\big) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)\dots P(X_n = x_n).$$

Suite de variables aléatoires discrètes indépendantes

Définition 1.24. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On dit que les variables aléatoires X_n sont indépendantes pour tout $n \in \mathbb{N}$ si, et seulement si toute sous-famille finie est constituée de variables aléatoires indépendantes.

Remarque 1.25. Si une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou une famille $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sont constituées de variables aléatoires discrètes indépendantes, alors, en particulier, X_i et X_j sont indépendantes pour tout $i \neq j$.

Lemme des coalitions

Théorème 1.26. Soit $X_1, X_2, \dots X_p, X_{p+1}, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes et indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Alors, pour toute fonction f et toute fonction g bien définies, les variables aléatoires $f(X_1, X_2, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Exemple 1.27. Soit X, Y, Z, T quatre variables aléatoires indépendantes. Alors XY et Z sont indépendantes, Ze^Y et $X - T^2$ sont indépendantes, X, $Y - Z$ et T^3 sont indépendantes.

1.5 Calculs de probabilités à l'aide de la loi conjointe

Méthode : Autres calculs : $P(X=Y)$, $P(X \leqslant Y)$...

Utiliser la formules des probabilités totales pour utiliser la loi conjointe et l'indépendance, le cas échéant. Par exemple :

$$\begin{aligned}
P(X=Y) &= \sum_{x\in X(\Omega)} P\big([X=x]\cap[X=Y]\big) \quad \text{avec SCE } \big([X=x]\big)_{x\in X(\Omega)}\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} P\big([X=x]\cap[Y=x]\big)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)\times P(Y=x) \quad \text{si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes}\\
P(X=Y) &= \sum_{y\in Y(\Omega)} P\big([Y=y]\cap[X=Y]\big) \quad \text{avec SCE } \big([Y=y]\big)_{y\in Y(\Omega)}\\
&= \sum_{y\in Y(\Omega)} P\big([Y=y]\cap[X=y]\big)\\
&= \sum_{y\in Y(\Omega)} P(Y=y)\times P(X=y) \quad \text{si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes}\\
P(X\leqslant Y) &= \sum_{x\in X(\Omega)} P\big([X=x]\cap[X\leqslant Y]\big) \quad \text{avec SCE } \big([X=x]\big)_{x\in X(\Omega)}\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} P\big([X=x]\cap[Y\geqslant x]\big)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)\times P(Y\geqslant x) \quad \text{si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes}\\
P(X\leqslant Y) &= \sum_{y\in Y(\Omega)} P\big([Y=y]\cap[X\leqslant Y]\big) \quad \text{avec SCE } \big([Y=y]\big)_{y\in Y(\Omega)}\\
&= \sum_{y\in Y(\Omega)} P\big([Y=y]\cap[X\leqslant y]\big)\\
&= \sum_{y\in Y(\Omega)} P(Y=y)\times P(X\leqslant y) \quad \text{si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes}
\end{aligned}$$

Exercice 1.28. Soit X et Y deux variables indépendantes de loi géométrique de paramètre $p\in]0;1[$. Calculer $P(X=Y)$ et $P(X\leqslant Y)$.

2 Opérations sur les variables aléatoires indépendantes

2.1 Somme de deux variables aléatoires indépendantes

Méthode : Loi de probabilité de la somme de deux variables aléatoires discrètes

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes (♣), notons $S = X + Y$ leur somme. Alors, pour tout $s \in S(\Omega)$:

FPT avec SCE $\big([X = x]\big)_{x\in X(\Omega)}$:

$$\begin{aligned} P(S = s) &= \sum_{x\in X(\Omega)} P\big([X = x] \cap [S = s]\big) \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} P\big([X = x] \cap [X + Y = s]\big) \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} P\big([X = x] \cap [Y = s - x]\big) \\ &\overset{(♣)}{=} \sum_{x\in X(\Omega)} P(X = x) \times P(Y = s - x) \end{aligned}$$

La somme porte en réalité sur les termes $x \in X(\Omega)$ tels que $s - x \in Y(\Omega)$

FPT avec SCE $\big([Y = y]\big)_{y\in Y(\Omega)}$:

$$\begin{aligned} P(S = s) &= \sum_{y\in Y(\Omega)} P\big([Y = y] \cap [S = s]\big) \\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)} P\big([Y = y] \cap [X + Y = s]\big) \\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)} P\big([Y = y] \cap [X = s - y]\big) \\ &\overset{(♣)}{=} \sum_{y\in Y(\Omega)} P(Y = y) \times P(X = s - y) \end{aligned}$$

La somme porte en réalité sur les termes $y \in Y(\Omega)$ tels que $s - y \in X(\Omega)$

Dans le cas où les variables sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$), on a $S(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et on peut aussi écrire, pour tout $k \in S(\Omega)$:

$$\begin{aligned} P(S = k) &= \sum_{i+j=k} P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) \\ &= \sum_{i=0}^{k} P\big([X = i] \cap [Y = k - i]\big) \\ &\overset{(♣)}{=} \sum_{i=0}^{k} P(X = i) \times P(Y = k - i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S = k) &= \sum_{i+j=k} P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) \\ &= \sum_{j=0}^{k} P\big([X = k - j] \cap [Y = j]\big) \\ &\overset{(♣)}{=} \sum_{j=0}^{k} P(X = k - j) \times P(Y = j) \end{aligned}$$

La notation $\sum_{i+j=k}$ signifie que la somme porte sur tous les couples d'entiers positifs ou nuls (i, j) tels que $i + j = k$.

Exemple 2.1. On lance deux dés réguliers à 4 faces et on note S la somme des résultats obtenus. Donner la loi de S.

On note X le résultat du 1$^{\text{er}}$ dé et Y le résultat du 2$^{\text{nd}}$. Alors X et Y suivent la loi uniforme sur $[\![1,4]\!]$ et sont indépendantes.

La loi conjointe est donnée par : $P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = P(X = i) \times P(Y = j) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ pour tout $i, j \in [\![1,4]\!]$.

On a $S = X + Y$. $S(\Omega) = [\![2,8]\!]$ On a alors :

- $P(S = 2) = P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{1}{16}$ car

$$[S = 2] = [X = 1] \cap [Y = 1]$$

- $P(S=3)=P(X=1)P(Y=2)+P(X=2)P(Y=1)=\frac{2}{16}$ car
$$[S=3]=\big([X=1]\cap[Y=2]\big)\cup\big([X=2]\cap[Y=1]\big)$$
- $P(S=4)=P(X=1)P(Y=3)+P(X=2)P(Y=2)+P(X=3)P(Y=1)=\frac{3}{16}$,
- $P(S=5)=P(X=1)P(Y=4)+P(X=2)P(Y=3)+P(X=3)P(Y=2)+P(X=4)P(Y=1)=\frac{4}{16}$,
- $P(S=6)=P(X=2)P(Y=4)+P(X=3)P(Y=3)+P(X=4)P(Y=2)=\frac{3}{16}$,
- $P(S=7)=P(X=3)P(Y=4)+P(X=4)P(Y=3)=\frac{2}{16}$,
- $P(S=8)=P(X=4)P(Y=4)=\frac{1}{16}$.

La somme $\sum_{i=2}^{8} P(S=i)$ vaut bien 1.

Formule de Vandermonde

Lemme 2.2. Soit m,n et k trois entiers naturels. Alors
$$\sum_{i+j=k}\binom{n}{i}\binom{m}{j}=\binom{n+m}{k}$$
avec la convention $\binom{q}{p}=0$ si $p<0$ ou $p>q$.
On peut aussi écrire :
$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}\qquad\qquad \sum_{j=0}^{m}\binom{n}{k-j}\binom{m}{j}=\binom{n+m}{k}$$

Preuve. Cela provient de l'identification du coefficient de x^k dans le développement de l'égalité $(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{n+m}$ obtenu avec la formule du binôme :

- $(1+x)^n(1+x)^m=\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right)\times\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j\right)$,
- $(1+x)^{m+n}=\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}x^k$.

Le monôme de degré k dans $(1+x)^{m+n}$ est $\binom{m+n}{k}x^k$. Et le monôme de degré k dans le produit $(1+x)^n(1+x)^m$ s'obtient en additionnant tous les termes $\binom{n}{i}x^i\times\binom{m}{j}x^j=\binom{n}{i}\binom{m}{j}x^{i+j}$ pour lesquels $i+j=k$. □

Stabilité de la loi binomiale pour la somme

Théorème 2.3. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$, suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (m,p) et (n,p). Alors la somme $X+Y$ suit la loi binomiale de paramètres $(m+n,p)$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} X \text{ et } Y \text{ indépendantes}\\ X\hookrightarrow\mathscr{B}(m,p)\\ Y\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)\end{array}\right\}\Longrightarrow X+Y\hookrightarrow\mathscr{B}(m+n,p)}$$

Démonstration. Notons $S = X + Y$. $S(\Omega) = [\![0; m+n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0; m+n]\!]$, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(S=k) &= \sum_{i=0}^{m} P\big([X=i]\cap[S=k]\big) \quad \text{avec SCE } \big([X=i]\big)_{i\in[\![0,m]\!]} \\
&= \sum_{i=0}^{m} P\big([X=i]\cap[X+Y=k]\big) \\
&= \sum_{i=0}^{m} P\big([X=i]\cap[Y=k-i]\big) \\
&= \sum_{i=0}^{m} P(X=i)\times P(Y=k-i) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} p^i q^{m-i} \binom{n}{k-i} p^{k-i} q^{n-(k-i)} \\
&= p^k q^{m+n-k} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} \\
&= p^k q^{m+n-k} \binom{m+n}{k} \quad \text{d'après la formule de Vandermonde.}
\end{aligned}$$

Donc $S \hookrightarrow \mathscr{B}(m+n, p)$. □

Remarque 2.4. En particulier, si $m = n = 1$: la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p est une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(2, p)$. En généralisant :

Somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli

Corollaire 2.5. Soit $n \geqslant 2$, $p \in]0;1[$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. Alors $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p : $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.
Ainsi : la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même espérance p suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

$$\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \dots, X_n \text{ indépendantes} \\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p) \end{array}\right\} \Longrightarrow X_1 + X_2 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$$

Preuve. Par récurrence classique, à partir de $n = 2$ (« si c'est vrai pour 2, c'est vrai pour n »).

- Initialisation : Pour $n = 2$, on applique le théorème 2.3 avec les variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 suivant la loi binomiale de paramètres 1 et p. Alors $X_1 + X_2$ suit la loi binomiale de paramètres $1 + 1 = 2$ et p.
- Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. Supposons la propriété établie pour n variables aléatoires indépendantes.
  Soit $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi $\mathscr{B}(p)$. Alors, d'après l'hypothèse de récurrence, la somme $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètre n et p.
  Par ailleurs, d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires S_n et X_{n+1} sont indépendantes. On peut donc appliquer à nouveau le théorème 2.3 et on obtient : $S_n + X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n+1, p)$.
  La propriété est donc établie au rang $n+1$ puisque $S_n + X_{n+1} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{n+1}$.
- Conclusion : D'après le principe de récurrence simple, la propriété est donc établie pour tout $n \geqslant 2$.

□

Stabilité de la loi de Poisson pour la somme

Théorème 2.6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Alors la somme $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \\ X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda) \\ Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu) \end{array}\right\} \Longrightarrow X+Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda+\mu)$$

Démonstration. Notons $S = X+Y$. On a $S(\Omega) = \mathbb{N}$, et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(S=k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P\big([X=i]\cap[S=k]\big) \quad \text{FPT avec SCE } \big([X=i]\big)_{i\geqslant 0} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} P\big([X=i]\cap[X+Y=k]\big) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} P\big([X=i]\cap[Y=k-i]\big) \\
&= \sum_{i=0}^{k} P\big([X=i]\cap[Y=k-i]\big) + \sum_{i=k+1}^{+\infty} \underbrace{P\big([X=i]\cap[Y=k-i]\big)}_{=0} \\
&\quad \text{car } [Y=k-i] \text{ est impossible si } k-i<0 \text{ i.e. } i \geqslant k+1 \\
&= \sum_{i=0}^{k} P(X=i)\times P(Y=k-i) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} e^{-\mu}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= e^{-\lambda}e^{-\mu}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i} \\
&= e^{-\lambda}e^{-\mu}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}(\lambda+\mu)^k \quad \text{d'après la formule du binôme.}
\end{aligned}$$

On en déduit que $S \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda+\mu)$. □

En généralisant :

Somme de n variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson

Corollaire 2.7. Soit $n \geqslant 2$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels strictement positifs et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Alors $S_n = X_1+X_2+\ldots+X_n$ est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$.

$$\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ indépendantes} \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_i) \end{array}\right\} \Longrightarrow X_1+X_2+\ldots+X_n \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)$$

Preuve. Par récurrence classique, à partir de $n = 2$ (« si c'est vrai pour 2, c'est vrai pour n »).

- Initialisation : Pour $n = 2$, on applique le théorème 2.6 avec les variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2. Alors $X_1 + X_2$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
- Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. Supposons la propriété établie pour n variables aléatoires indépendantes.
  Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathscr{P}(\lambda_i)$, $i \in [\![1, n+1]\!]$. Alors, d'après l'hypothèse de récurrence, la somme $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.
  Par ailleurs, d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires S_n et X_{n+1} sont indépendantes. On peut donc appliquer à nouveau le théorème 2.6 et on obtient : $S_n + X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda + \lambda_{n+1})$.
  La propriété est donc établie au rang $n+1$ puisque $S_n + X_{n+1} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{n+1}$ et $\lambda + \lambda_{n+1} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+1}$.
- Conclusion : D'après le principe de récurrence simple, la propriété est donc établie pour tout $n \geqslant 2$.

□

Exemple 2.8. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre 1. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre n.

2.2 Maximum ou minimum de deux variables aléatoires indépendantes

Maximum ou minimum de deux variables aléatoires

Proposition et définition 2.9. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On note $Z = \max(X, Y)$ (resp. $T = \min(X, Y)$) le maximum (resp. minimum) des deux variables aléatoires X et Y :

- $Z = \max(X, Y)$ est définie comme suit : $Z = \begin{cases} X & \text{si } X \geqslant Y \\ Y & \text{sinon} \end{cases}$
- $T = \min(X, Y)$ est définie comme suit : $T = \begin{cases} X & \text{si } X \leqslant Y \\ Y & \text{sinon} \end{cases}$

$\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$ sont deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$

Preuve. Admis. □

Fonction de répartition du maximum ou minimum de deux variables indépendantes

Proposition 2.10. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit $Z = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$. Alors, les fonctions de répartition F_Z et F_T sont données par : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{F_Z(x) = F_X(x) \times F_Y(x)} \qquad \boxed{1 - F_T(x) = \big(1 - F_X(x)\big) \times \big(1 - F_Y(x)\big)}$$

Preuve. Tout est basé sur les égalités suivantes d'événements, pour tout réel x :

$$[\max(X, Y) \leqslant x] = [X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x] \qquad \text{et} \qquad [\min(X, Y) > x] = [X > x] \cap [Y > x]$$

Alors, puisque X et Y sont indépendantes $(\star)$:

1. $F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P(\max(X, Y) \leqslant x) = P\big([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]\big) \overset{(\star)}{=} P(X \leqslant x) \times P(Y \leqslant x) = F_X(x) \times F_Y(x)$.
2. $1 - F_T(x) = 1 - P(T \leqslant x) = P(T > x) = P(\min(X, Y) > x) = P\big([X > x] \cap [Y > x]\big) \overset{(\star)}{=} P(X > x) \times P(Y > x) = \big(1 - P(X \leqslant x)\big) \times \big(1 - P(Y \leqslant x)\big) = \big(1 - F_X(x)\big) \times \big(1 - F_Y(x)\big)$.

□

Méthode : Loi du maximum ou du minimum de deux variables indépendantes

On cherche la fonction de répartition de $Z = \max(X, Y)$ ou $T = \min(X, Y)$, puis on calcule la loi de probabilité de Z et de T en appliquant la méthode permettant de retrouver la loi à partir de la fonction de répartition. Par exemple, si X et Y sont à valeurs entières : $P(Z = k) = F_Z(k) - F_Z(k-1)$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.

Exemple 2.11. Donner la loi du maximum de deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{U}(\llbracket 1, 4 \rrbracket)$.

2.3 Produit de deux variables aléatoires indépendantes

Méthode : Loi de probabilité du produit de deux variables aléatoires

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, la loi de leur produit $Z = XY$ est donnée par :

$$P(XY = z_k) = \sum_{x_i \times x_j = x_k} P\big([X = x_i] \cap [Y = x_j]\big)$$

Si, de plus, X et Y sont à valeurs entières strictement positives et indépendantes, on a :

$$P(XY = k) = \sum_{i \times j = k} P(X = i)P(Y = j) = \sum_{i} P(X = i)P\left(Y = \frac{k}{i}\right) = \sum_{j} P\left(X = \frac{k}{j}\right)P(Y = j).$$

(la somme portant sur les valeurs de i et j pour lesquelles $P(X = i)$ et $P(Y = j)$ sont toutes deux non nulles et telles que $i \times j = k$).
On peut également appliquer la formule des probabilités totales comme dans le cas de $S = X + Y$.

Exemple 2.12. On lance deux dés réguliers à 4 faces et on note M le produit des résultats obtenus. Donner la loi de M.
On note X le résultat du 1^er^ dé et Y le résultat du 2$^{\text{nd}}$. Alors X et Y suivent la loi uniforme sur $[\![1, 4]\!]$ et sont indépendantes.
La loi conjointe est donnée par : $P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = P(X = i) \times P(Y = j) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ pour tout $i, j \in [\![1, 4]\!]$.
On a $M = XY$. $M(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16\}$. On a alors :

- $P(M = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{1}{16}$,
- $P(M = 2) = P(X = 1)P(Y = 2) + P(X = 2)P(Y = 1) = \frac{2}{16}$,
- $P(M = 3) = P(X = 1)P(Y = 3) + P(X = 3)P(Y = 1) = \frac{2}{16}$,
- $P(M = 4) = P(X = 1)P(Y = 4) + P(X = 2)P(Y = 2) + P(X = 4)P(Y = 1) = \frac{3}{16}$,
- $P(M = 6) = P(X = 2)P(Y = 3) + P(X = 3)P(Y = 2) = \frac{2}{16}$;
- $P(M = 8) = P(X = 2)P(Y = 4) + P(X = 4)P(Y = 2) = \frac{2}{16}$;
- $P(M = 9) = P(X = 3)P(Y = 3) = \frac{1}{16}$,
- $P(M = 12) = P(X = 3)P(Y = 4) + P(X = 4)P(Y = 3) = \frac{2}{16}$;
- $P(M = 16) = P(X = 4)P(Y = 4) = \frac{1}{16}$.

La somme $\sum_{i \in M(\Omega)} P(M = i)$ vaut bien 1.

3 Espérance et couples de variables aléatoires discrètes

3.1 Théorème du transfert

Théorème du transfert

Théorème 3.1. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et g une fonction numérique de deux variables définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Alors, sous réserve de convergence absolue (dans le cas infini), la variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ admet une espérance qui vaut :

$$\boxed{E(Z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} g(x, y) \times P\big([X = x] \cap [Y = y]\big)}$$

En particulier (et sous réserve de convergence absolue), on a :

$$\boxed{E(XY) = E\big(X \times Y\big) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} x \times y \times P\big([X = x] \cap [Y = y]\big)}$$

Démonstration. Admis. □

Exercice 3.2. Dans l'exemple 1.5, calculer $E(X^2 Y^3)$.

3.2 Espérance d'une somme ou d'un produit

Méthode : Espérance de la somme de deux variables aléatoires discrètes

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes et $S = X + Y$ leur somme. Pour calculer $E(S)$, on peut :

- $\boxed{\text{ES1}}$ utiliser la linéarité : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $\boxed{\text{ES2}}$ utiliser la loi de S et la définition de l'espérance : $E(S) = \sum_{s \in S(\Omega)} sP(S = s)$
- $\boxed{\text{ES3}}$ utiliser la loi conjointe et le théorème du transfert : $E(X + Y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} (x + y)P\big([X = x] \cap [Y = y]\big)$

Condition suffisante pour l'existence de l'espérance de XY

Lemme 3.3. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et <u>admettant une variance</u>. Alors le produit XY admet une espérance.

Preuve. On sait que $X^2 + Y^2 + 2XY = (X + Y)^2 \geqslant 0$ et $X^2 + Y^2 - 2XY = (X - Y)^2 \geqslant 0$, on en déduit :

$$-\frac{1}{2}(X^2 + Y^2) \leqslant XY \leqslant \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) \Leftrightarrow |XY| \leqslant \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$$

Puisque X et Y admettent une variance, X^2 et Y^2 admettent une espérance, et $\frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$ également. Alors, par théorème de domination, XY admet une espérance. □

Espérance d'un produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes

Théorème 3.4. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et admettant une espérance. Alors le produit XY admet une espérance, égale au produit des espérances de X et Y :

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \\ X \text{ et } Y \text{ admettent une espérance} \end{array}\right\} \Longrightarrow E(XY) \text{ existe et } E\big(XY\big) = E(X) \times E(Y)$$

Démonstration. Sous réserve de convergence (dans le cas infini) :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \left(\sum_{y\in Y(\Omega)} xyP\big([X=x]\cap[Y=y]\big) \right) \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} \left(\sum_{y\in Y(\Omega)} xyP(X=x)\times P(Y=y) \right) \\ &\quad \text{(par indépendance des variables aléatoires } X \text{ et } Y\text{)} \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x) \underbrace{\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} yP(Y=y) \right)}_{=E(Y)} \\ &= E(Y) \times \underbrace{\left(\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x) \right)}_{E(X)} \\ &= E(X)E(Y). \end{aligned}$$

□

Méthode : Espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes et $Z = XY$ leur produit. Pour calculer $E(Z)$, on peut :

- EP1 calculer $E(X) \times E(Y)$ si X et Y sont indépendantes, car $E(XY) = E(X)E(Y)$
- EP2 utiliser la loi de Z et la définition de l'espérance : $E(Z) = \sum_{z\in Z(\Omega)} zP(Z=z)$
- EP3 utiliser la loi conjointe et le théorème du transfert : $E(XY) = \sum_{x,y} xyP\big([X=x]\cap[Y=y]\big)$

Exercice 3.5. Avec les notations de l'exemple 2.12, calculer $E(XY)$ de trois façons différentes.

Variance de la somme de deux variables aléatoires discrètes indépendantes

Théorème 3.6. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et admettant une variance. Alors la variable aléatoire somme $X + Y$ admet une variance, égale à la somme des variances de X et Y :

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \\ X \text{ et } Y \text{ admettent une variance} \end{array}\right\} \Longrightarrow V(X+Y) \text{ existe et } V\big(X+Y\big) = V(X) + V(Y)$$

Démonstration. Par hypothèse, X et Y admettent une variance, donc X^2 et Y^2 admettent une espérance. Donc, par linéarité, $2(X^2+Y^2)$ également. Par ailleurs :

$$0 \leqslant (X+Y)^2 \leqslant 2(X^2+Y^2)$$

En effet :

$$2(X^2+Y^2)-(X+Y)^2 = 2X^2+2Y^2-X^2-2XY-Y^2 = X^2-2XY+Y^2 = (X-Y)^2 \geqslant 0$$

Donc $(X+Y)^2$ admet une espérance, d'après le théorème de domination, c'est-à-dire $X+Y$ admet une variance.
Il vient ensuite, en utilisant la linéarité de l'espérance :

$$V(X+Y) = E\big((X+Y)^2\big) - \big(E(X+Y)\big)^2 = E\big(X^2+Y^2+2XY\big) - \big(E(X)+E(Y)\big)^2$$
$$= E\big(X^2\big)+E\big(Y^2\big)+2\cancel{E(XY)} - \big(E(X)\big)^2 - \big(E(Y)\big)^2 - 2\cancel{E(X)E(Y)} = V(X)+V(Y)$$

car $E\big(XY\big) = E(X)E(Y)$ d'après le théorème 3.4 et l'indépendance de X et Y. □

Variance de la somme de n variables aléatoires discrètes indépendantes

Proposition 3.7. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et admettant une variance. Alors $X_1+X_2+\ldots+X_n$ admet une variance, et :

$$\boxed{V\big(X_1+X_2+\ldots+X_n\big) = V(X_1)+V(X_2)+\ldots+V(X_n)}$$

Preuve. Par récurrence classique, à partir de $n=2$ (« si c'est vrai pour 2, c'est vrai pour n »).

- Initialisation : Pour $n=2$, on applique le théorème 3.6 avec les variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2. Alors X_1+X_2 admet une variance et $V\big(X_1+X_2\big) = V(X_1)+V(X_2)$.
- Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. Supposons la propriété établie pour n variables aléatoires indépendantes.
  Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes et admettant une variance.
  Alors, d'après l'hypothèse de récurrence, la somme $S_n = X_1+X_2+\ldots+X_n$ admet une variance, et $V\big(X_1+X_2+\ldots+X_n\big) = V(X_1)+V(X_2)+\ldots+V(X_n)$.
  Par ailleurs, d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires S_n et X_{n+1} sont indépendantes. On peut donc appliquer à nouveau le théorème 3.6 et on obtient : S_n+X_{n+1} admet une variance, et $V\big(S_n+X_{n+1}\big) = V(S_n)+V(X_{n+1})$.
  La propriété est donc établie au rang $n+1$ puisque $S_n+X_{n+1} = X_1+X_2+\ldots+X_{n+1}$ et $V(S_n)+V(X_{n+1}) = V(X_1)+V(X_2)+\ldots+V(X_n)+V(X_{n+1})$.
- Conclusion : D'après le principe de récurrence simple, la propriété est donc établie pour tout $n \geqslant 2$.

□

Feuille d'exercices sur le chapitre I

Couples de variables aléatoires discrètes

Exercice 1. On dispose d'un stock illimité de boules numérotées 1, 2, 3, ... Une machine délivre un nombre aléatoire de boules dans une urne, selon la loi donnée par la variable aléatoire X : pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $P(X = i) = \frac{i}{2^{i+1}}$ (on dispose donc de X boules numérotées de 1 à X dans l'urne). On effectue un tirage, et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Vérifier que la loi de X est bien une loi de probabilité.
   Calculer $E(X)$. On donne $V(X) = 2$.
2. Donner la loi conjointe de X et de Y.
3. Déterminer la loi de Y puis son espérance.

Exercice 2. Une boite contient 3 boules blanches et 2 boules noires. On y effectue indéfiniment des tirages avec remise de 2 boules prises simultanément. On définit les évènements :

— A_n : « on obtient deux boules de couleurs différentes au n^e tirage »,

— B_n : « on obtient deux boules blanches au n^e tirage ».

1. Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
2. On note X le numéro du tirage au cours duquel on obtient pour la première fois deux boules de couleurs différentes, et Y le numéro du tirage au cours duquel on obtient pour la première fois deux boules blanches.
   (a) Déterminer les lois de X, Y et leurs espérances.
   (b) Déterminer la loi du couple (X, Y).
   (c) En déduire $P(X < Y)$.

Exercice 3. On tire simultanément deux jetons d'une urne contenant quatre jetons numérotées de 1 à 4. Soit X le plus petit et Y le plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales de X et Y.
2. X et Y sont-elles indépendantes?
3. (a) Déterminer la loi conditionnelle de Y lorsque le plus petit numéro tiré vaut 3.
   (b) Déterminer l'espérance et l'écart-type de Y lorsque le plus petit numéro tiré vaut 3.
4. Déterminer la loi conditionnelle de X lorsque le plus grand numéro tiré est pair.

Exercice 4. Soit m et n deux entiers non nuls. On dispose d'un dé équilibré.

— On lance m fois le dé, et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

— Puis on relance n dois le dé, et on note Y la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

1. Déterminer la loi de X et de Y. Donner leur espérance et leur variance.
2. On note $Z = X + Y$. Déterminer, de deux façons différentes, la loi de Z.

Exercice 5. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, et suivant la loi de Poisson de paramètre 2.

1. Calculer $P(X + Y = 3)$.
2. Calculer $P(X + Y \leqslant 4)$.
3. Montrer, de deux façons différentes, que : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{k} \frac{2^i}{i!} \times \frac{2^{k-i}}{(k-i)!} = \frac{4^k}{k!}$.

Exercice 6. Le nombre X de candidats à un examen suit une loi de Poisson. Ils sont en moyenne M à passer cet examen. Chaque candidat a une probabilité p non nulle de réussir l'examen, et on suppose que les réussites des différents candidats sont indépendantes. On note Y le nombre de reçus, et Z le nombre de recalés.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. En déduire la loi de Y, puis la loi de Z.
3. Montrer que Y et Z sont indépendantes.