Bibliographie ECG 1ère année – Cours de Lettres
Chloé Deschard

Lectures d'été

Vous lirez les ouvrages ci-dessous pour la rentrée de septembre.

Jean-Pierre Vernant, *L'univers, les dieux, les hommes*, éd. Points-essais

Laurent Gaudé, *Écoutez nos défaites*, Actes Sud, Babel

Mary W. Shelley, *Frankenstein ou le Prométhée moderne*, édition au choix (je conseille l'édition Garnier-Flammarion, mais ce n'est pas une obligation)

Ouvrage de référence

Vous devrez vous procurer l'ouvrage suivant pour la rentrée. Il vous permettra d'approfondir le travail sur le cours tout au long de l'année :

100 fiches de culture générale, Histoire de la pensée, dir. D. Bourdin (6ème édition, 2019), Bréal

En vous souhaitant un bon été et de bonnes lectures,

Chloé Deschard
chloe.deschard@hotmail.com

ECG1 – ANGLAIS

WELCOME!

Nous attirons votre attention sur la grande différence entre le niveau requis pour le baccalauréat et les exigences des concours. Pendant les deux années de préparation vous travaillerez sur l'actualité du monde anglo-saxon à travers la presse. Voici quelques conseils de travail pour que vous soyez prêts à la rentrée :

1. LISEZ LA PRESSE REGULIEREMENT

Il est vivement recommandé, avant la rentrée de septembre, de lire régulièrement la presse anglo-saxonne, habitude que vous veillerez à conserver tout au long des deux années. Nous vous recommandons de varier vos lectures.

Sites de journaux et magazines, accessibles en ligne :

The Economist www.economist.com
The Guardian www.theguardian.com/international (gratuit)
The Daily Telegraph www.telegraph.co.uk (gratuit)
The Independent www.independent.co.uk (gratuit)
The New York Times www.nytimes.com
The Washington Post www.washingtonpost.com
The Wall Street Journal www.wsj.com
The Financial Times www.ft.com/home/uk
CNN news website http://edition.cnn.com (gratuit)
BBC News www.bbc.com/news

Ayez toujours avec vous un **carnet de vocabulaire** dans lequel vous allez noter toutes les expressions et tous les mots que vous rencontrerez lors de vos lectures et écoutes. Au fil de l'année, ce carnet va s'enrichir de vos trouvailles et vous permettra d'accroître votre vocabulaire de manière ciblée.

2. TRAVAILLEZ LA COMPREHENSION ORALE

Pour travailler votre compréhension orale, améliorer votre accent et enrichir votre vocabulaire, vous devez prendre l'habitude d'écouter régulièrement des bulletins d'actualités et autres émissions d'information, par exemple sur les sites suivants :

BBC World Service Radio www.bbc.co.uk/radio/player/bbc_world_service

BBC Radio 4 www.bbc.co.uk/radio4

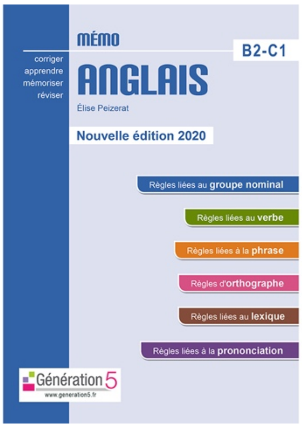
NPR radio www.npr.org/programs/morning-edition/

CBS News Live http://www.cbsnews.com/live/

- Pensez également aux **podcasts (**par exemple, ceux de ***The Economist*** ou de ***BBC Radio)***, dont la forme se rapproche du format des épreuves orales.
- Le site **TED - Ideas Worth Spreading** (https://www.ted.com/) propose un grand nombre de vidéos de longueur et de contenus divers.
- CNN 10 propose des vidéos de dix minutes expliquant l'actualité récente. https://edition.cnn.com/cnn10
- N'oubliez pas le côté plaisir dans votre travail sur l'anglais. Regardez vos séries TV préférées en VO (sous-titrées en anglais si besoin), et lorsque vous allez au cinéma, choisissez la séance en VO également !

3. OUVRAGE A ACQUERIR POUR LA RENTREE

Achetez Mémo-Anglais B2-C1 (éd. Génération 5 , 2020, ISBN : 978-2362463488) pour revoir les bases de la grammaire anglaise avant septembre.



Histoire, Géographie et Géopolitique

(7 heures hebdomadaires)

L'objectif de ces deux années est d'acquérir une culture **historique, géographique et géopolitique du monde contemporain** mobilisable au service d'une action, entre autres dans l'entreprise, pour de futurs cadres. La démarche géopolitique combine les approches historique, géographique, et économique afin d'éclairer au mieux les rapports de force contemporains. Vous penserez la géopolitique comme moteur de l'histoire et agent de transformation des espaces et des sociétés et apprendrez à analyser la diversité et la complexité du monde actuel, à en rendre compte de manière claire et organisée à travers la rédaction d'un texte, d'un exposé oral ou d'un croquis.

Programme :

1° année :
L'étude est centrée sur les **grandes mutations du monde au XX° siècle** et la **mondialisation contemporaine**. Le programme part d'un état des lieux au début du XX° siècle pour aboutir au monde d'aujourd'hui ouvert, mis en réseau, mais marqué par la mise en compétition des territoires par des acteurs qui s'affrontent sous différentes formes. Les enjeux du monde actuel sont abordés avec une place particulière accordée aux problématiques durables.

2° année :
L'étude prend la suite de la démarche chronologique et analytique de première année en procédant à une mise en perspective de l'ensemble du globe. Le programme de deuxième année vise à mettre en évidence, les **géodynamiques continentales de l'Europe, de l'Afrique, de l'Amérique et de l'Asie**. Cette méthode vise à révéler les hiérarchies, les rapports de force, les flux, les tensions et les opportunités dans chacun des grands ensembles continentaux et entre eux.

Préparation estivale :

Le programme large et les approches multiples nécessitent des connaissances historiques, géographiques et économiques solides. La préparation estivale doit vous permettre de découvrir les approches qui seront utilisées dans l'année et d'acquérir le socle de connaissances attendu en début d'année. **Il est donc impératif de faire ce travail sérieusement, tout au long de l'été**, en gardant trace, sous forme de notes et de fiches, de tout ce que vous lisez. Cela vous sera précieux durant vos deux années de classe préparatoire.

L'été qui précède la classe préparatoire doit vous permettre de découvrir les thèmes que vous allez étudier au cours des deux prochaines années : programme indiqué dans les deux manuels référencés en fin de ce document ou accessible ici. Pour cela, il est important de consulter de temps en temps, sur le mode de la découverte, les sites suivants. Vous y trouverez des approches thématiques qui vous permettront d'approfondir les thémes en lien avec l'actualité. Ils vous permettront aussi de vous familiariser avec les démarches que nous utiliserons pendant les deux prochaines années :

- ➢ **Les grands thèmes économiques** peuvent être abordés simplement grâce à la série courte « Dessine-moi l'éco » sur http://dessinemoileco.com pour acquérir les notions essentielles d'économie en 3 minutes. Des éléments d'actualité sont aussi abordés mais c'est un peu léger pour la classe préparatoire…
- ➢ **Les grands thèmes géopolitiques** sont traités de façon synthétique et accessible par l'émission d'Arte « Le dessous des cartes » : https://www.arte.tv/fr/videos/RC-014036/le-dessous-des-cartes/**.** Vous pouvez consulter les émissions mais aussi les interviews de

certains spécialistes issus de l'enseignement supérieur dans la partie « Les experts du Dessous des cartes ». Vous devez vous habituer à utiliser et citer ces auteurs de référence dans l'enseignement supérieur.

- ➢ **Spatialisez les phénomènes grâce aux cartes mises en ligne et commentées :** l'atlas en ligne de Sciences Po intitulé « Espace mondial : l'Atlas » est très bien documenté et propose une approche thématique utile pour préparer le programme (https://espace-mondial-atlas.sciencespo.fr/fr/index.html) ; le site du cartographe Philippe Rekacewicz intitulé *Visionscarto* (https://visionscarto.net) propose des approches originales qui éveillerons votre curiosité.
- ➢ **Suivez l'actualité internationale** durant l'été en écoutant la radio, en lisant des journaux et médias en ligne. Vous pouvez retrouver articles et émissions sur les sites de ces médias et dans les podcasts qu'ils proposent : https://theconversation.com/fr, https://legrandcontinent.eu/fr/, https://www.lemonde.fr, https://www.lefigaro.fr, https://www.lesechos.fr, https://www.radiofrance.fr/franceculture, https://www.rfi.fr/fr/. Vous pouvez approfondir l'actualité sur les sites spécialisés en géopolitique : https://www.diploweb.com, https://www.iris-france.org, https://www.revueconflits.com, https://www.areion24.news.

Vos lectures, vos écoutes et vos visionnages vous permettront de **construire une revue de presse tout au long de l'été**. Elle ne sera pas rendue mais devra vous permettre de vous préparer au **contrôle de connaissances** qui aura lieu **à la rentrée.** Celui-ci portera sur les lieux, les acteurs et la signification des évènements survenus dans le monde du 1er juillet au 31 août 2023. Les connaissances attendues doivent être précises, localisées, diversifiées et bien sur comprises.

- ➢ En guise d'introduction au programme, **lisez impérativement** les ouvrages suivants :
  - Daniel Cohen, *La prospérité du vice*, Livre de poche, plusieurs années d'édition toutes valables, 320 pages (privilégiez la plus récente si vous l'achetez neuf : https://www.livredepoche.com/livre/la-prosperite-du-vice-9782253159650)**.** Ouvrage qui propose une mise en perspective historique longue et une introduction à l'économie. Il est à lire en premier en relevant et définissant les notions économiques et les principales thèses des auteurs évoqués.
  - François-Charles Mougel & Séverine Pacteau, *Histoire des relations internationales de 1815 à nos jours*, PUF, coll. Que sais-je ?, 127 pages (idem pour l'année d'édition : privilégiez les éditions les plus récentes pour un achat neuf https://www.puf.com/content/Histoire_des_relations_internationales_de_1815_à_nos_jours). Ouvrage qui vous permettra de compléter vos connaissances historiques sur la période contemporaine.

À rendre à la rentrée :

A partir du travail de lecture effectué dans l'été, **vous préparerez pour la rentrée** :

- **Une fiche de lecture d'une feuille maximum** (recto/verso) sur l'ouvrage de Daniel Cohen présentant l'ouvrage, l'auteur, sa thèse, ainsi que les grandes approches économiques qu'il aborde. Votre fiche de lecture devra aussi présenter obligatoirement votre avis argumenté sur l'ouvrage.
- **Une synthèse** de l'ouvrage de F-C. Mougel & S. Pacteau. La synthèse ne devra pas dépasser 4 pages (soit une feuille double) et devra être présentée ainsi :
  - Première page : présentation des auteurs, de l'ouvrage et de l'intérêt que représente la lecture de cet ouvrage sous une forme rédigée classique.
  - Deuxième, troisième et quatrième page : tableau de synthèse des trois premières parties de l'ouvrage (une par page) en respectant le modèle de

présentation indiqué en page 4 de ce document. Les éléments de réponse doivent être rédigés (phrases) à la main. Le tableau peut être reproduit par ordinateur.

La dernière partie de l'ouvrage devra être lue mais ne fera pas l'objet d'une synthèse rendue. Sa lecture vous sera utile pour mieux comprendre les chapitres qui seront abordés en début de première année.

Les travaux demandés, fruits d'un modeste **travail personnel** (et non copié, plagié, ou réalisé à l'aide d'un logiciel de production de contenu), doivent être **organisés, soignés, aérés** et **<u>rédigés à la main obligatoirement</u> dans un français correct. Ils seront à remettre lors du premier cours de géopolitique et seront évalués.**

En complément du cours de 1e année, vous aurez besoin des deux manuels référencés ci-dessous. Vous pouvez les acheter dès le début de l'été ce qui vous permettra d'éviter les ruptures de stock à la rentrée. Vous pourrez ainsi les feuilleter durant l'été. Vous pouvez aussi les **acheter d'occasion à condition qu'ils correspondent bien aux éditions suivantes** :

- E. Godeau, *Les grandes mutations du monde au XXe siècle*, Nathan, 2021 https://enseignants.nathan.fr/catalogue/les-grandes-mutations-du-monde-au-xxe-siecle-prepas-ecg-9782091673745.html
- N. Balaresque, *La mondialisation contemporaine*, Nathan, 2021. https://enseignants.nathan.fr/catalogue/la-mondialisation-contemporaine-rapports-de-force-et-enjeux-prepas-ecg-9782091673738.html

Bonnes vacances, et à bientôt.

Votre professeur, Matthieu Charrier

PARTIE ? – TITRE ?
Principale mutation survenue dans les rapports de forces sur la période ?

	Dates et évènements décisifs	Acteurs principaux	Rapports de forces	Explication de l'évolution du rapport de force
Chapitre ? Titre ?				
Chapitre ? Titre ?				
Chapitre ? Titre ?				

CONSEILS DE TRAVAIL RENTREE 2023 ALLEMAND ECG 1° année

Voici des conseils de travail pour être prêts à la rentrée en septembre :

PRÉPARATION PENDANT LES VACANCES

PRENDRE DE BONNES HABITUDES

Les épreuves écrites et orales des concours sont basées sur des sujets d'actualité et/ou sur la civilisation allemande. Vous devez donc comprendre des documents audio et écrits de la presse quotidienne et vous y entraîner avec régularité, chez vous.

La maîtrise du vocabulaire et de la grammaire est nécessaire : là aussi un travail personnel régulier est absolument nécessaire.

Les cours et les khôlles (interrogations orales) vont vous guider, mais votre effort personnel (régularité, gestion du temps, efficacité, maîtrise de soi) est absolument indispensable.

VOCABULAIRE ET GRAMMAIRE

Avant d'attaquer le vocabulaire spécifique en cours, **révisez obligatoirement pendant les vacances tout le vocabulaire que vous avez vu lors de votre scolarité en collège et lycée.** Soyez très précis lors de ces révisions : attention aux genres… **Révisez également les règles de grammaire** : il faut connaître ses verbes forts, la déclinaison et l'appliquer, la syntaxe et mettre le verbe au bon endroit… Pas d'imprécisions, il faut des connaissances précises et immédiatement disponibles !

Si vous avez vraiment bien suivi vos cours jusque là, vos notes et cahiers sont une base suffisante. Mais si vous estimez préférable de réviser vocabulaire et grammaire à partir d'un livre, je vous conseille celui-ci:

Vasseur (Jean-Pierre) Le memento du germaniste. Grammaire et vocabulaire. Editions Vasseur ISBN 978 291 330 5847

Lors de votre première colle <u>individuelle</u>, vous aurez un petit test de niveau à passer.

ACTUALITE

1. Pour vous habituer à comprendre l'actualité orale sur internet et améliorer votre prononciation deux sites :

Deutsche Welle, où vous trouvez des informations classées par date, enregistrées sur un débit très lent et facilement compréhensible :
http://www.dw.com/de/media-center/deutschkurse/s-100816?type=17&programs=17269854

Tagesschau, où vous pouvez écouter les nouvelles du jour en 100 secondes, en permanence actualisées, sur un débit de germanophone standard.
http://www.tagesschau.de/100sekunden/index.html

Notez vous une dizaine de mots clés succincts type « post-it » sur des nouvelles différentes.
A la rentrée, au premier cours sur l 'actualité en groupe, nous échangerons sur ces mots clés pris pendant l'été.

2. Pour lire des articles de presse en langue allemande voici une sélection non exhaustive :
   - *www.berlinonline.de*
   - *www.faz.de*
   - *www.sueddeutsche.de*
   - *www.tagesspiegel.de*
   - *www.welt.de*

Dans les deux cas, il s'agit également d'enrichir votre vocabulaire.

CIVILISATION

Pour avoir une vision globale de la civilisation allemande dès l'entrée en CPGE, **lisez le livre de civilisation suivant (vous pouvez vous contenter de la partie en français)** : cela vous facilitera beaucoup la compréhension des textes d'actualité que vous lirez par la suite en CPGE :

Duconseille (Brigitte) Deutschland Aktuell : L'Allemagne d'aujourd'hui, les nouveaux défis. Ellipses (ISBN 9782340066458) avril 2022

> **Notez vous cinq passages qui vous ont particulièrement interpellé lors de la lecture (dans des chapitres différents et en précisant la page)**
> **Lors de votre première colle individuelle, vous en parlerez en allemand. Vous avez droit à des notes, mais succinctes type plan (les phrases entières notées sont interdites)**

SEJOUR EN Allemagne

Partez en Allemagne : découvrez et parlez !! Attention néanmoins : le parler de la vie de tous les jours donne de la fluidité, mais ne garantit pas forcement la correction grammaticale et, surtout, diffère du vocabulaire d'actualité dont vous avez besoin en CPGE. Pour cela, un seul remède : apprendre à son bureau… Il faut les deux !

MATERIEL A AVOIR EN ECG 1

Marhuenda (Marie) et Viselthier (Bernard). Fiches et Tests de Grammaire. Allemand. Parcours Université. Ophrys Grammaire (ISBN 9 782708 013322)

Scheuermann (Adelgard). Vocabulaire thématique Allemand-Français. Le monde d'aujourd'hui. Ellipses (ISBN 9 782729 838386)

Un grand dictionnaire d'au moins 220 000 mots, édité récemment est utile, en dessus des dictionnaires en ligne

Lambert (Hélène) 100 % Thème Allemand. Ellipses ISBN 978-2-7298-77637

Lambert (Hélène) 100 % Version Allemand. Ellipses ISBN 978-2-7298-7484-1

Duconseille (Brigitte) Deutschland Aktuell : L'Allemagne d'aujourd'hui, les nouveaux défis. Ellipses (ISBN 9782340066458)

Il faut un grand classeur (pour la maison), une chemise trois rabats pour les cours (allemand uniquement), du papier. Pas de cahier (cela ne permet pas de s'organiser à long terme)

Bonnes vacances et à bientôt à la rentrée !

Sabine Dragon ***Professeur d'Allemand***

Extra n° 1

VIVE LES VACANCES

Sommaire

Ce cahier a pour but de vous préparer à votre entrée en ECG1 Maths Appliquées. Il vous fera revoir certaines notions étudiées de la seconde à la terminale et il est conseillé de parcourir tout ceci au fil de l'été afin de rentrer l'esprit affuté.

Certains exercices vous sembleront faciles, d'autres plus techniques et certains difficiles. Ceux marqués d'une $\star$ en marge le sont, du moins pour certains items. Nous répondrons au questions soulevées lors des premières séances.

Vous pourrez vous reporter à vos cours des années précédentes pour certains rappels si cela vous est nécessaire. La calculatrice est proscrite, sauf mention contraire et de toutes manières, elle est interdite aux concours. Les solutions, généralement succinctes, sont données en fin de document mais vous ne devez vous y référer que pour vérifier vos résultats. S'ils ne sont pas identiques, vous devez absolument persévérer.
En tout cas, ne trichez pas, c'est mal.

Pour finir, vous devrez rendre les trois exercices du paragraphe 16 lors du premier cours de l'année alors ne vous y prenez pas au dernier moment.

Il est indispensable d'y consacrer du temps et de faire preuve de beaucoup de sérieux pour ce travail. Vous vous rendrez rapidement compte que cela vous aura été salutaire.

Passez de bonnes vacances !

1 Calculs et simplifications

(a) $3-5+1-19$
(b) $(-3)^2$
(c) -5^2
(d) $7-3\times 5$
(e) $-23-4\times 3^2$
(f) $(4-5)^2$
(g) 4^2-5^2
(h) 2^3-3^2
(i) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$
(j) $\frac{81}{27}+1$
(k) $3-\frac{13}{11}$
(l) $\frac{12}{16}-\frac{21}{28}$
(m) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$
(n) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$
(o) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$
(p) $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$
(q) $\frac{2}{5}\ \frac{3}{4}\ \frac{5}{6}$
(r) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$
(s) $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{9}}$
(t) $\frac{3-5}{5}$
(u) $\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\times\frac{5}{3}$
(v) $\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{5}{8}$
(w) $\dfrac{\frac{1}{2}-2}{\frac{1}{3}-3}$
(x) $\dfrac{3\times 4}{3\times 2}$
(y) $\dfrac{2+4}{2+1}$
(z) $3+\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\ \frac{2}{5}$
(α) $2^3.5^3$
(β) $\frac{4^5}{8^5}$
(γ) $2^4.2^3$
(δ) $\frac{6^2}{6^3}$
(ε) $3^2.3^{-5}$
(ζ) $(2^3)^{-4}$
(η) $6^4.15^{-2}$.
(θ) $a^{2^3}a^{-5}$
(ι) $\frac{(a^4)^2.b^{-5}}{(ab)^{-1}}$
(κ) $\left(\frac{a}{b^{-1}}\right)^5\cdot\frac{b}{a\times a^3}$

2 Expressions

1. n désignant un nombre entier, donner l'expression des nombres suivants.
   (a) Le double de n.
   (b) L'opposé de n.
   (c) Le triple de n.
   (d) Le nombre entier qui suit n.
   (e) Le tiers de n.
   (f) Le nombre entier qui précède n.
   (g) La différence de n et de 3.
   (h) La somme de 4 et de la moitié de n.
2. Soit f le nombre de filles et g le nombre de garçons dans une classe.
   Traduire chacun des énoncés suivants par une égalité ou une inégalité.
   (a) Il y a autant de filles que de garçons.
   (b) Il y a quatre garçons de plus que de filles.
   (c) Il y a cinq filles de moins que de garçons.
   (d) Il y a trois fois plus de filles que de garçons.
   (e) Il y a deux fois moins de garçons que de filles.
   (f) Si l'on double le nombre de garçons, on obtient trois garçons de plus que de filles.
   (g) Il y a plus de filles que de garçons.
   (h) Il y a plus du triple de garçons que du double de filles.
   (i) Les garçons sont moins de trois fois plus nombreux que les filles.
   (j) Les filles sont plus de deux fois moins nombreuses que les garçons.

3 C'est logique

(α) Vrai ou Faux ? Justifiez. Attention, ceci n'est pas une blague, répondez donc en toute logique.
   (a) Les étoiles sont immortelles, Socrate est immortel donc Socrate est une étoile.
   (b) Tous les éléphants roses vivent en Antarctique. Or Barbar est un éléphant qui vit en Antarctique donc Barbar est rose.
   (c) On sait que si les petits pois sont rouges, alors il ne sont pas comestibles. Or Némo est un poisson rouge, donc il n'est pas comestible.
   (d) Lors d'un certain radio-crochet, aucun candidat ne sait chanter. Or certaines casseroles le savent, donc quelques casseroles ne sont pas candidates.

(β) A. La phrase suivante est supposée vraie :
   « Si la télé est allumée, alors il y a nécessairement quelqu'un qui la regarde. »
   Choisir la réponse correcte pour chaque question.
   1. La télé est allumée. Quelqu'un la regarde-t-il ?
      A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
   2. Personne ne regarde la télé. Est-elle allumée ?
      A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
   3. La télé est éteinte. Quelqu'un la regarde-t-il ?
      A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
   4. Quelqu'un regarde la télé. Est-elle allumée ?
      A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.

B. Même consigne pour la phrase : « L'équation (E) n'a pas de solution négative. »
1. Est-ce que -2 est une solution de (E) ?
A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
2. a est une solution de (E). Est-ce que a est négatif ?
A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
3. 3 est-il une solution de (E) ?
A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
4. b n'est pas une solution de (E). Est-ce que b est négatif ?
A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.

(γ) Compléter par « donc » ou « car ».
- (a) J'ai eu un accident ... j'ai grillé un feu rouge.
- (b) Il est malade ... il ne viendra pas.
- (c) J'ai eu un cadeau ... c'est mon anniversaire.
- (d) Je ne suis pas européen ... je ne suis pas allemand.
- (e) Jean est triste ... c'est la fin des vacances.
- (f) Il pleut ... la fête est annulée.
- (g) (AB) et (CD) sont parallèles ... $ABCD$ est un parallélogramme.
- (h) $ABCD$ possède deux angles droits ... c'est un rectangle.
- (i) Le triangle ABC est équilatéral ... il est isocèle.
- (j) $y^2 = 25$ ... $y = 5$.
- (k) $x \in [-1\,;4]$ ... $x \in [-2\,;5]$.
- (l) $u^2 \geqslant 49$ ... $u \geqslant 7$.
- (m) $\sqrt{x} \leqslant 6$ ... $x \leqslant 36$.

⋆ (δ) Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse.
- Pour prouver qu'elle est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple.
- Pour prouver qu'elle est vraie, il est nécessaire de trouver une démonstration.

- (a) Si $x^2 \geqslant 4$ alors $x \geqslant 2$.
- (b) Pour tous réels x et y, $(x+y)^3 = x^3 + y^3$.
- (c) Pour tout réel x, le réel $-10x$ est négatif.
- (d) Il existe une équation n'ayant aucune solution réelle.
- (e) Il existe une équation ayant cinq solutions réelles distinctes.
- (f) Si a et b sont deux entiers naturels, alors $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$ est un entier naturel.

4 R.T.T.

Pour passer du bon temps, rien de tel que les R.T.T.
Résoudre de **T**ê**T**e les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.
« Micro-brouillon » autorisé pour les plus difficiles. Ne pas oublier de tester les réponses.

- (a) $x + 4 = 6$
- (b) $5t + 7 = 1$
- (c) $2 - 3q \geqslant 4$
- (d) $y - 5 \geqslant 2y - 3$
- (e) $z - 1 < z + 1$
- (f) $u + v + 3 > 5u + v - 1$
- (g) $u^2 + v^2 - 2uv \geqslant 0$
- (h) $3 - 2x \leqslant -2x - 5$
- (i) $6 - 3x \leqslant 0$
- (j) $x^2 - 1 = 0$
- (k) $x^2 = 16$
- (l) $z^2 + 3 = 0$
- (m) $w^2 + 9 \leqslant 0$
- (n) $x^2 \geqslant 25$
- (o) $3u^2 + 4 = 1$
- (p) $x^2 - 9 < 0$
- (q) $z^2 - 4z + 4 = 0$
- (r) $3y^2 - 2y - 1 = 0$
- (s) $u^2 - 6u + 9 > 0$
- (t) $x^2 - 2x + 1 \leqslant 0$
- (u) $\sqrt{3-x} \geqslant 5$
- (v) $\dfrac{1}{z} \geqslant \dfrac{1}{2}$
- (w) $\dfrac{1}{x} < 3$
- (x) $\dfrac{1}{t^2+3} = \dfrac{1}{5}$
- (y) $(x-1)(x+4)(x-3) > 0$
- (z) $3 - \dfrac{2}{p} \leqslant 1$

5 Last Fraction Hero

Calculer, simplifier, réduire,... le plus rapidement possible, le plus souvent possible « de tête » et de toutes façons, sans calculatrice et sans se préoccuper des éventuels problèmes de définition des quotients.

(a) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{4}$

(b) $\dfrac{5}{7}-\dfrac{3}{2}$

(c) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}-\dfrac{5}{2}$

(d) $\dfrac{\frac{4}{3}-\frac{5}{2}}{\frac{7}{4}-3}$

(e) $\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{4}{7}}{1+2}$

(f) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}$

(g) $\dfrac{3x}{x-2}+\dfrac{1-4x}{3x}$

(h) $\dfrac{7a}{7a+1}+\dfrac{3a}{2-3a}$

(i) $\dfrac{\frac{3}{x}-\frac{5}{1-2x}}{x-\frac{2x}{x+1}}$

(j) $\dfrac{\frac{2}{y+4}-\frac{3}{3-2y}}{-\frac{y}{y+4}+\frac{1}{y}}$

(k) $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}$

(l) $2+\dfrac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{2}}}}}$

(m) $x+\dfrac{1}{x+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}}$

(n) $\dfrac{\frac{x-1}{x+2}-\frac{x+2}{x-1}}{\frac{x-2}{x+1}-\frac{x+1}{x-2}}$

(o) $\dfrac{\frac{5x^2-10x-15}{2x-1}}{\frac{3+2x-x^2}{4-8x}}$

6 Le Factorisathon

Rappeler les trois identités remarquables ainsi que les identités « $ka \pm \dots$ » :

⋆ Factoriser ensuite le plus possible les expressions suivantes.

(a) $(1+x)(x+4)+6(x+4)$

(b) x^2-9

(c) $4t^2-\frac{16}{9}$

(d) $2(q+1)^2+(1-q)(1+q)$

(e) $(2t+3)^2-(1+t)(2t+3)$

(f) $(2A+3)^2-25$

(g) $\varphi^3-4\varphi+3\varphi^2$

(h) $1-4x^2$

(i) $4(5+t)(1-6t)+7(t+5)+3(t+5)^2$

(j) $3(2z-3)^2-3(5-z)^2$

(k) $3(2x-1)^2+6(-1+2x)(7-4x)$

(l) $(5+u)(3u-1)+6(3u-1)(5-2u)$

(m) $3x^2-10$

(n) $-\frac{1}{4}(n-2)3n+(2-n)^2(1+4n)$

(o) $25y^2-9+(-2y+5)(5y-2)-5+2y$

7 La racine, c'est carré

En préambule, rappelons la définition suivante :

Définition *Soit a un réel positif ou nul.*
La racine carrée de a est l'unique réel positif de carré valant a.
Pour $a \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{a}^2 = a$ et $\sqrt{a}$ est positif.

Calculer, simplifier, résoudre et/ou écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ les écritures suivantes. N'utiliser la calculatrice qu'en tout dernier ressort.

(a) $\sqrt{49}$

(b) $-\sqrt{64}$

(c) $(-\sqrt{79})^2$

(d) $-\sqrt{127}^2$

(e) $\sqrt{-25}^2$

(f) $\sqrt{36}+\sqrt{64}$

(g) $\sqrt{36+64}$

(h) $\sqrt{9\times 4}$

(i) $\sqrt{9}\times\sqrt{4}$

(j) $\sqrt{(-9)\times(-4)}$

(k) $\sqrt{-9}\times\sqrt{-4}$

(l) $\sqrt{32}$

(m) $\sqrt{72}$

(n) $\sqrt{300}$

(o) $\sqrt{12}.\sqrt{27}$

(p) $\sqrt{75}.\sqrt{6}$

(q) $\sqrt{6}.\sqrt{15}.\sqrt{10}$

(r) $\sqrt{8}+\sqrt{12}+\sqrt{28}$

(s) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(t) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(u) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{32}}$

(v) $\dfrac{\sqrt{84}}{\sqrt{175}}$

(w) $x^2-9=0$

(x) $y^2-18=0$

(y) $-3z^2-5=0$

(z) $3-5t^2=0$

VouF ?

- (α) Si $u^2 = 25$ alors $u = 5$.
- (β) La racine carrée de la somme de deux réels positifs égale la somme de leur racine carrée.
- (γ) La racine carrée du produit de deux réels égale le produit de leur racine carrée.
- (δ) La racine carrée d'un réel positif est inférieure ou égale à celui-ci.

8 Rester dans le cadre

Donner le meilleur encadrement des nombres suivants sachant que $x \in [2\,;5]$ et $y \in]-3\,;4]$.

- (a) $7x + 3$
- (b) $1 - 4y$
- (c) $3x - 2y - 8$
- (d) $\dfrac{-5}{x+1}$
- (e) $-2y^2$
- (f) $x^2 - 2x + 1$
- (g) $6xy$
- (h) $\dfrac{y}{x}$

9 Sine Qua Tion

1. Pour chacune des équations suivantes, exprimer formellement chacune des variables en fonction des autres.

   - (a) $x + y - 5 = 0$
   - (b) $u - v + 2 = 0$
   - (c) $3a - 2b = 7$
   - (d) $\alpha - 3\beta + 5\gamma + 6 = 0$
   - (e) $\frac{1}{2}AB - \frac{1}{3}A - 5 = 0$
   - (f) $4fg - 3f + 2g = 0$
   - (g) $u + 1 = \dfrac{d}{t}$
   - (h) $\frac{3}{4}at - 7\dfrac{t}{x} + 2 = 0$
   - (i) $3xy - 2yz = 5 - 7xyz$
   - (j) $k^2 = j + 2$
   - (k) $r^2 - 2r + 1 = 7s + 3$
   - (l) $m^2 - 4m = n^2 - 4$

2. Même type d'exercice pour les inéquations suivantes.

   - (m) $x + y > 3$
   - (n) $a - b + 4 < 0$
   - (o) $5p - 3q - 2 \geqslant 4$
   - (p) $3 - 2f + 4g \leqslant 1$
   - (q) $\frac{u}{v} \leqslant -2$
   - (r) $ab - a > 1$

⋆ 3. Résoudre les équations ou systèmes d'équations suivants, en utilisant différentes méthodes : substitution, combinaison linéaire, un peu des deux.

   - (s) $\begin{cases} \alpha - 2 = 4 \\ 2\beta + 3\alpha = 0 \end{cases}$
   - (t) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$
   - (u) $\begin{cases} 3a + 2b - 4 = 0 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases}$
   - (v) $\begin{cases} 2u - 4v = 3u - 7v + 1 \\ 5u + 2v - 4 = 1 \end{cases}$
   - (w) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 6y = 7 + 4x \end{cases}$
   - (x) $\begin{cases} m - 2n + 3 = 0 \\ 4n = 2m + 6 \end{cases}$
   - (y) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + z = 4 \\ 3x + 2z = 1 \end{cases}$
   - (z) $\begin{cases} a + 2b + c = 4 \\ 2a - 3b + 5c = 0 \\ 3a - b + 2c = 1 \end{cases}$

10 Entre parenthèses

On pose $\boldsymbol{A(x) = x + 4}$, $\boldsymbol{B(x) = 3x - 2}$, $\boldsymbol{C(x) = 7 - x}$ et $\boldsymbol{D(x) = 1 - 2x}$.

⋆ 1. Développer et réduire les expressions suivantes (attention, $E^3(u) = [E(u)]^3$).

   - (a) $-4B(x)$
   - (b) $C(x) - 3D(x)$
   - (c) $-3A(x) - 5C(x)$
   - (d) $A(x)B(x)$
   - (e) $C(x)D(x)$
   - (f) $A^2(x)D(x)$
   - (g) $B(x)C(x) - A(x)D(x)$
   - (h) $5B^2(x) - 4C^2(x)$
   - (i) $-5D^3(x)$
   - (j) $B^4(x)$
   - (k) $-2B(x)A^2(x) - 3C^2(x)D(x)$
   - (l) $\frac{A(x)}{B(x)C(x)} - \frac{B(x)}{C(x)D(x)}$

2. Calculer de tête les nombres suivants.

(m) $A(-6)$	(o) $C(-3) - D(-4)$	(q) $D^2(-\frac{3}{2})$
(n) $B(-4)$	(p) $C^2(-1)$	(r) $-3D(-1)C(-4)A(-5)$

⋆ 3. Exprimer en fonction de x les expressions suivantes.

(s) $A(x^2)$	(v) $-4A(x-3)$	(y) $C(4-x^2)D(2x+4)$
(t) $D(x+1)$	(w) $-3B(5-3x^2)$	
(u) $B(3-2x)$	(x) $-2D^2(4-2x^2)$	(z) $\frac{B(2x+1)-C(3x-1)}{A(x-1)D(3-4x)}$

11 VouF ?

Sauf précision contraire, les fonctions sont définies et dérivables sur les ensembles $\mathscr{D}$, les équations et inéquations doivent être vérifiées sur tout leur ensemble de définition.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

(a) $x^2 - 2x + 5$ n'admet pas de racines réelles.

(b) $3x^2 + x - 4$ admet 1 et -4 pour racines.

(c) $\sqrt{2}\,x^2 - 4x + \sqrt{3}$ n'admet pas de forme factorisée.

(d) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = x$.

(e) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant x^2$.

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$.

(g) $\lim\limits_{x\to 3^+} 2x + 5 = 11$.

(h) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x-2} = 0$.

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = -1$.

(j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4}{5-x} = 0^-$.

(k) Si f' est positive sur l'intervalle $\mathscr{D}$ alors f est croissante sur $\mathscr{D}$.

(l) Si f' est négative sur le domaine $\mathscr{D}$ alors f est décroissante sur $\mathscr{D}$.

(m) Si f admet un extremum local en $a \in \mathscr{D}$, alors $f'(a) = 0$.

(n) Si $a \in \mathscr{D}$ est tel que $f'(a) = 0$, alors f admet un extremum local en a.

(o) Si f est croissante alors f est positive.

(p) $(fg)' = f'g'$

(q) $(\frac{1}{g}) = \frac{1}{g^2}$

(r) Si $f(x) = 2(x-2)(3x^2+5)$ alors $f'(x) = 12x^2 - 12x + 10$.

(s) Si $f(x) = \frac{2x-3}{5x-1}$ alors $f'(x) = \frac{13}{5x-1}$.

(t) Si $u_0 = 3$, $u_1 = -6$, $u_2 = 12$ alors $u_3 = -24$.

(u) Si (u_n) est géométrique et $u_1 = 3$ alors $u_2 = 9$.

(v) Si (u_n) est arithmétique, $u_3 = 5$ et $u_6 = 20$ alors $u_1 = -5$.

(w) On a toujours $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

(x) On a toujours $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

(y) Si on lance un dé cubique, alors $\mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{6}$.

(z) Si on lance deux dés cubiques équilibrés, alors $\mathbb{P}(\{\mathit{Somme} = 8\}) = \mathbb{P}(\{\mathit{Somme} = 9\})$.

12 Affiner

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elle est affine ou non et, le cas échéant, préciser son coefficient directeur, son ordonnée à l'origine et sa racine éventuelle.

$\alpha\,(x) = 2x - 1$	*alpha*	$\iota\,(x) = bx + a$	*iota*	$\rho\,(z) = m^2z + p^2$	*rhô*
$\beta\,(x) = 3 - 5x$	*bêta*	$\kappa\,(a) = ax + b$	*kappa*	$\sigma\,(m) = m^2z + p^2$	*sigma*
$\gamma\,(u) = -\frac{4u}{3} - \frac{5}{7}$	*gamma*	$\lambda\,(b) = ax + b$	*lambda*	$\tau\,(p) = m^2z + 3p + 1$	*tau*
$\delta\,(y) = -6y$	*delta*	$\mu\,(z) = ax + b$	*mu*	$\upsilon\,(x) = 3x - 4d - cx$	*upsilon*
$\varepsilon\,(t) = 2$	*epsilon*	$\nu\,(x) = -mx + 2p$	*nu*	$\varphi\,(x) = \frac{ax}{b}$	*phi*
$\zeta\,(z) = 3x + 2$	*zêta*	$\xi\,(a) = 2ax - 3b$	*ksi/xi*	$\chi\,(x) = \frac{3}{x}$	*khi/chi*
$\eta\,(x) = ax + b$	*êta*	$o\,(x) = fx$	*omicron*	$\psi\,(t) = 5 - \frac{2}{x}$	*psi*
$\theta\,(x) = b + ax$	*thêta*	$\pi\,(f) = x + f$	*pi*	$\omega\,(x) = Xx + X$	*oméga*

13 R.T.T. : le retour

⋆ **R**ésoudre de **T**ê**T**e les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

(α) $3x+5=-1$	(ι) $v^2=7$	(ρ) $5(a-3)(a+2)<0$
(β) $7-2c=4$	(κ) $5y^2-1=0$	(σ) $(11-2x)(4+3x)\leqslant 0$
(γ) $4+2y\geqslant -5$	(λ) $3-4z^2=1$	(τ) $\sqrt{b+5}\leqslant 3$
(δ) $5-6z\leqslant 4$	(μ) $t^2+4=0$	(υ) $\sqrt{3-q}<5$
(ε) $2t+1>5t-2$	(ν) $x^2-3x+2=0$	(φ) $\sqrt{7-2p}>2$
(ζ) $-7u-4<-9-2u$	(ξ) $5-2p^2+3p=0$	(χ) $\lvert 5-w\rvert<2$
(η) $\dfrac{3}{x}\geqslant\dfrac{2}{5}$	(ο) $r^2>1$	(ψ) $\lvert \ell^7\rvert>-4$
(θ) $-\dfrac{2}{y}<\dfrac{3}{7}$	(π) $x^2-6\leqslant 0$	(ω) $\lvert x+4\rvert>3$

14 À la dérive

Dériver les fonctions suivantes, sans tenir compte des éventuels problèmes de définition.

$a(x)=(7x+3)(6-3x)$	$d(x)=\frac{-3}{6-5x}$	$g(x)=\sqrt{5-8x}$
$b(x)=(3x^4-7x^3-5)(8-3x^5)$	$e(x)=\frac{4x-3}{7-3x}$	$h(x)=\frac{-7}{\sqrt{9-4x^2}}$
$c(x)=(5-2x)(4-3x)(8-x)$	$f(x)=\frac{6x^2-3x+1}{5-4x+2x^3}$	$i(x)=\frac{(5x^3-4x^2-2)(3x^4-7x+3)}{(6-5x)^3}$

15 Hélène & Eudes

1. Simplifier les écritures suivantes : (a) $e^{-x}e^2$ (b) $(e^x)^3\,e^{-2x}$ (c) $\dfrac{e^{x-1}}{e^{x+2}}$ (d) $\dfrac{e^{3u-2}\,e^{7-3u}}{e^{3-u}\,e^{u+2}}$
2. Développer puis réduire :
   (a) $(e^x+e^{-2x})^2$ | (b) $(e^{-2x}-e^x)(e^{-2x}+e^x)$ | (c) $(e^{3x}-e^{5x})^2$
3. Résoudre les équations et inéquations suivantes.
   (a) $e^{x^2}=e^{-x}$ | (c) $e^{2x^2+3}=e^{7x}$ | (e) $3e^{2x}+e^x-4=0$
   (b) $e^{2x}<e^x$ | (d) $e^{x+1}=e^{\frac{2}{x}}$ | (f) $e^x\leqslant e^{x^2-12}$
4. Dériver les fonctions suivantes sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.
   $a(x)=e^{2x+1}$ | $c(x)=(x+1)e^{-x}$ | $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$
   $b(x)=e^{-x}+\sqrt{e^{2x}}$ | $d(x)=x\,e^{\sqrt{x}}$ | $g(x)=e^{\frac{1-x}{1+x}}$
5. Simplifier les écritures suivantes (a et $b\in\,]\,0\,;+\infty\,[$).
   (a) $\dfrac{e^{\ln(8)}}{e^{3\ln(2)}}$
   (b) $\ln(3)+\ln(\frac{1}{3})$
   (c) $\ln(\sqrt{2}+1)+\ln(\sqrt{2}-1)$
   (d) $\ln(4)-\ln(9)-5\ln(2)+2\ln(3)+\ln(8)$
   (e) $\frac{1}{2}\ln(16)-\frac{3}{2}\ln(4)+\ln(9)+\frac{1}{3}\ln(8)-\frac{1}{2}\ln(81)$
   (f) $\ln(e^{a-b})-e^{\ln(a)}+\exp(\ln(b))$
   (g) $\exp(\ln(a)+\ln(b))-\exp(\ln(a)-\ln(b))$
   (h) $\ln(\frac{a}{b})-\ln(a^2)+\ln(\sqrt{b})+\frac{3}{2}\ln(\frac{a^2}{\sqrt{b}})$
   (i) $\ln(a^2b)-\ln(b^2a)+\ln(\frac{a}{b^3})+2\ln(\frac{b}{a})-\frac{1}{2}\ln(a^4b^6)$
   (j) $\dfrac{3\ln(\frac{b}{a})+\ln(a^3)-\ln(\sqrt{b})}{\ln(\frac{b}{a})-2\ln(\sqrt{b})-\ln(\frac{1}{\sqrt{a^7}})}$

16 Devoirs à rendre

On attend une rédaction précise, rigoureuse et soignée, sans être lourde ni redondante ou laborieuse, le tout devant tenir sur une feuille double. Donner tous les arguments, citer les théorèmes et en vérifier les conditions (mais ne pas les recopier).

Exercice 1 Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Calculer les premiers termes de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$. Est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?
2. Soit $(v_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - 3u_n$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique et en déterminer les caractéristiques.
3. Soit $(w_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = u_{n+1} - 2u_n$.
   Montrer que la suite $(w_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique et en déterminer les caractéristiques.
4. Donner les expressions de v_n et w_n en fonction de n.
5. En déduire que, pour tout entier n, $u_n = 3^n - 2^n$.

Exercice 2 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x + 1}$ de représentation graphique $\mathscr{C}_f$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f. La fonction f est-elle continue ?
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
   (b) En déduire les asymptotes (horizontales, verticales et/ou obliques) à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   (c) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote oblique.
4. Calculer la fonction dérivée f' puis dresser le tableau de variations complet de la fonction f.
5. Déterminer, en justifiant rigoureusement, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ puis de l'équation $f(x) = 3$.
6. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Exercice 3 Au zoo de La Fare-en-Dole, l'unique activité du manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un sautoir et d'un toboggan pour plonger. On a observé que si le manchot choisit :

- le sautoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8 ;
- le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.

Lors du premier passage, les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les événements :
S_n : « le manchot utilise le sautoir lors de son n-ième passage » ;
T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage ».
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \mathbb{P}(T_n)$.

1. (a) Vérifier que $\mathbb{P}(T_2) = 0,25$.
   (b) Dresser l'arbre de probabilité lors des passages n et $(n+1)$.
   (c) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1\,u_n + 0,2$.
   (d) Conjecturer la limite de la suite (u_n) à l'aide d'une calculatrice.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{9}$.
   (a) Prouver que (v_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   (c) Calculer la limite de la suite (u_n). Cela valide-t-il la conjecture émise ?

Vive la rentrée

1 Calculs et simplifications

(a) -20	(e) -59	(i) $\frac{22}{15}$	(m) $\frac{19}{12}$	(q) $\frac{1}{4}$	(u) -1	(y) 2
(b) 9	(f) 1	(j) 4	(n) $\frac{31}{30}$	(r) $\frac{14}{15}$	(v) $-\frac{1}{16}$	(z) $\frac{31}{10}$
(c) -25	(g) -9	(k) $\frac{20}{11}$	(o) $\frac{3}{4}$	(s) 6	(w) $\frac{9}{16}$	
(d) -8	(h) -1	(l) 0	(p) $\frac{15}{28}$	(t) $-\frac{2}{5}$	(x) 2	

(α) $2^3.5^3 = (2\times 5)^3$

(β) $\frac{4^5}{8^5} = \frac{4^5}{(2\times 4)^5} = \frac{1}{2^5}$

(γ) $2^4.2^3 = 2^{3+4} = 2^7$

(δ) $\frac{6^2}{6^3} = 6^{2-3} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$

(ε) $3^2.3^{-5} = 3^{2-5} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$

(ζ) $(2^3)^{-4} = 2^{3\times(-4)} = 2^{-12} = \frac{1}{2^{12}}$

(η) $6^4.15^{-2} = \frac{2^4.3^4}{3^2.5^2} = 2^4.3^2.5^{-2}$.

(θ) $a^{2^3}a^{-5} = a^{8-5} = a^3 = a^3b^0$

(ι) $\frac{(a^4)^2.b^{-5}}{(ab)^{-1}} = a^{4\times 2-(-1)}b^{-5-(-1)} = a^9b^{-4}$

(κ) $(\frac{a}{b^{-1}})^5.\frac{b}{a\times a^3} = a^{5-1-3}b^{-(-1)\times 5+1} = a^1b^6$

2 Expressions

1.

(a) $2n$.	(c) $3n$.	(e) $\frac{1}{3}n$.	(g) $n-3$.
(b) $-n$.	(d) $n+1$.	(f) $n-1$.	(h) $4+\frac{1}{2}n$.

2.

(a) $f=g$	(c) $f=g-5$	(e) $g=\frac{1}{2}f$	(g) $f>g$	(i) $g<3f$
(b) $g=f+4$	(d) $f=3g$	(f) $2g=f+3$	(h) $3g>2f$	(j) $f>\frac{1}{2}g$

3 C'est logique

(α) (a) Faux. Tout ce qui est immortel n'est pas nécessairement une étoile.

(b) Faux. Tous les éléphants qui vivent en Antarctique ne sont pas nécessairement roses.

(c) Faux. Nous n'avons aucune information sur les poissons rouges.

(d) Vrai. Les casseroles sachant chanter ne peuvent être candidates.

(β) A. 1 - Oui. 2 - Non. 3 - On ne peut savoir. 4 - On ne peut savoir.

B. 1 - Non. 2 - Non. 3 - On ne peut savoir. 4 - On ne peut savoir.

(γ)

(a) car	(c) car	(e) car	(g) car	(i) donc	(k) donc	(m) donc
(b) donc	(d) donc	(f) donc	(h) car	(j) car	(l) car	

(δ) (a) Si $x^2 \geqslant 4$ alors $x \geqslant 2$ Faux. $x=-3$ par exemple.

(b) Pour tous réels x et y, $(x+y)^3 = x^3+y^3$: Faux. $x=y=1$ par exemple.

(c) Pour tout réel x, le réel $-10x$ est négatif : Faux. $x=-1$ par exemple.

(d) Il existe une équation n'ayant aucune solution réelle : Vrai, $x^2+1=0$ par exemple.

(e) Il existe une équation ayant cinq solutions réelles distinctes : Vrai.
$x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=0$ par exemple.

(f) Si a et b sont deux entiers naturels, alors $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$ est un entier naturel : Vrai car $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4} = \frac{[(a+b)+(a-b)][(a+b)-(a-b)]}{4} = \frac{(2a)(2b)}{4} = ab \in \mathbb{N}$.

4 R.T.T.

(a) $x=2$	(f) $u<1$ et $v\in\mathbb{R}$	(k) $x=\pm 4$
(b) $t=-\frac{6}{5}$	(g) u et $v\in\mathbb{R}$	(l) $\varnothing$
(c) $q\leqslant -\frac{2}{3}$	(h) $\varnothing$	(m) $\varnothing$
(d) $y\leqslant -2$	(i) $x\geqslant 2$	(n) $x\in\,]-\infty\,;-5]\cup[5\,;+\infty[$
(e) $z\in\mathbb{R}$	(j) $x=\pm 1$	(o) $\varnothing$

(p) $x \in \,]-3\,;3\,[$
(q) $z = 2$
(r) $y = 1$ ou $y = -\frac{1}{3}$
(s) $u \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$
(t) $x = 1$
(u) $x \leqslant -22$
(v) $z \in \,]\,0\,;2\,]$
(w) $x \in \,]-\infty\,;0\,[\, \cup \,]\,\frac{1}{3}\,;+\infty\,[$
(x) $t = \pm\sqrt{2}$
(y) $x \in \,]-4\,;1\,[\, \cup \,]\,3\,;+\infty\,[$
(z) $p \in \,]\,0\,;1\,]$

5 Last Fraction Hero

(a) $\frac{19}{12}$
(b) $-\frac{11}{14}$
(c) $-\frac{17}{60}$
(d) $\frac{14}{15}$
(e) $\frac{13}{42}$
(f) $\frac{-1}{x(x-1)}$
(g) $\frac{5x^2+9x-2}{3x(x-2)}$
(h) $\frac{17a}{(2-3a)(7a+1)}$
(i) $\frac{(3-11x)(x+1)}{x^2(x-1)(1-2x)}$
(j) $\frac{y(7y+6)}{(3-2y)(y^2-y-4)}$
(k) $\frac{13}{8}$
(l) $\frac{41}{15}$
(m) $\frac{x^4+3x^2+1}{x(x^2+2)}$
(n) $\frac{(x-2)(x+1)(6x+3)}{(x+2)(x-1)(6x-3)}$
(o) 20

6 Le Factorisathon

(a) $(x+4)(x+7)$
(b) $(x-3)(x+3)$
(c) $(2t-\frac{4}{3})(2t+\frac{4}{3})$
(d) $(q+1)(q+3)$
(e) $(2t+3)(t+2)$
(f) $(2A-2)(2A+8)$
(g) $\varphi(\varphi-1)(\varphi+4)$
(h) $(1-2x)(1+2x)$
(i) $(t+5)(26-21t)$
(j) $3(3z-8)(z+2)$
(k) $3(2x-1)(13-6x)$
(l) $(3u-1)(35-11u)$
(m) $(x\sqrt{3}-\sqrt{10})(x\sqrt{3}+\sqrt{10})$
(n) $(2-n)(2+\frac{31}{4}n-4n^2)$
(o) $(5y-3)(3y+8)$

7 La racine, c'est carré

Soit a un réel positif ou nul. La racine carrée de a est l'unique réel positif de carré valant a. Pour $a \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{a}^2 = a$ et $\sqrt{a}$ est positif.

(a) $\sqrt{49} = 7$
(b) $-\sqrt{64} = -8$
(c) $(-\sqrt{79})^2 = 79$
(d) $-\sqrt{127}^{\,2} = -127$
(e) $\sqrt{-25}^2$ n'a aucun sens.
(f) $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$
(g) $\sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$
(h) $\sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$
(i) $\sqrt{9} \times \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$
(j) $\sqrt{(-9) \times (-4)} = \sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$
(k) $\sqrt{-9} \times \sqrt{-4}$ n'a aucun sens.
(l) $\sqrt{32} = \sqrt{16}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
(m) $\sqrt{72} = \sqrt{9}\sqrt{4}\sqrt{2} = 3 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
(n) $\sqrt{300} = \sqrt{100}\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$
(o) $\sqrt{12}.\sqrt{27} = \sqrt{4}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{9} = 2 \times 3 \times 3 = 18$
(p) $\sqrt{75}.\sqrt{6} = \sqrt{25}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{2} = 5 \times 3\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$
(q) $\sqrt{6}.\sqrt{15}.\sqrt{10} = \sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{5} = 2 \times 3 \times 5 = 30$
(r) $\sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{28} = \sqrt{4}\sqrt{2} + \sqrt{4}\sqrt{3} + \sqrt{4}\sqrt{7} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7})$
(s) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(t) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\sqrt{3}} + \dfrac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{15}$
(u) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{32}} = \dfrac{\sqrt{5}\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{16}\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{8}\sqrt{10}$

(v) $\dfrac{\sqrt{84}}{\sqrt{175}} = \dfrac{\sqrt{4}\sqrt{3}\sqrt{7}}{\sqrt{25}\sqrt{7}} = \dfrac{2}{5}\sqrt{3}$

(w) $x^2 - 9 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = -3$ ou $x = 3$

(x) $y^2 - 18 = 0 \iff y^2 = 18 \iff y = -\sqrt{18} = -\sqrt{9}\sqrt{2} = -3\sqrt{2}$ ou $y = 3\sqrt{2}$

(y) $-3z^2 - 5 = 0 \iff z^2 = -\frac{5}{3}$ qui n'admet aucune solution réelle.

(z) $3 - 5t^2 = 0 \iff t^2 = \frac{3}{5} \iff t = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{15}}{5}$ ou $t = \frac{\sqrt{15}}{5}$

(α) Si $u^2 = 25$ alors $u = 5$: Faux (et -5 !)

(β) La racine carrée de la somme de deux réels positifs égale la somme de leur racine carrée : Faux ($\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 2 = \sqrt{1} + \sqrt{1}$).

(γ) La racine carrée du produit de deux réels égale le produit de leur racine carrée : Faux (et s'ils sont tous deux strictement négatifs ?).

(δ) La racine carrée d'un réel positif est inférieure ou égale à celui-ci : Faux (et s'il est entre 0 et 1 ?)

8 Rester dans le cadre

(a) $7x + 3 \in [\,17\,;38\,]$

(b) $1 - 4y \in [\,-15\,;13\,[$

(c) $3x - 2y - 8 \in [\,6\,;29\,[$

(d) $\dfrac{-5}{x+1} \in [\,-\frac{5}{3}\,;-\frac{5}{6}\,]$

(e) $-2y^2 \in [\,-32\,;0\,]$

(f) $x^2 - 2x + 1 \in [\,1\,;16\,]$

(g) $6xy \in \,]-90\,;120\,]$

(h) $\dfrac{y}{x} \in \,]-\frac{3}{2}\,;2\,]$

9 Sine Qua Tion

1. (a) $x = 5 - y$ et $y = 5 - x$

(b) $u = v - 2$ et $v = u + 2$

(c) $a = \frac{2b+7}{3}$ et $b = \frac{3a-7}{2}$

(d) $\alpha = 3\beta - 5\gamma - 6$, $\beta = \frac{1}{3}(\alpha + 5\gamma + 6)$ et $\gamma = \frac{1}{5}(3\beta - \alpha - 6)$

(e) $A = \dfrac{5}{\frac{1}{2}B - \frac{1}{3}}$ et $B = \dfrac{\frac{1}{3}A + 5}{\frac{1}{2}A}$

(f) $f = \frac{2g}{3-4g}$ et $g = \frac{3f}{4f+2}$

(g) $u = \frac{d}{t} - 1$, $d = t(u+1)$ et $t = \frac{d}{u+1}$

(h) $a = \dfrac{7\frac{t}{x} - 2}{\frac{3}{4}t}$, $t = \dfrac{2}{\frac{7}{x} - \frac{3}{4}a}$ et $x = \dfrac{7t}{\frac{3}{4}at + 2}$

(i) $x = \dfrac{2yz + 5}{3y + 7yz}$, $y = \dfrac{5}{3x - 2z + 7xz}$ et $z = \dfrac{5 - 3xy}{7xy - 2y}$

(j) $j = k^2 - 2$ et $k = \pm\sqrt{j+2}$

(k) $s = \frac{1}{7}((r-1)^2 - 3)$ et $r = 1 \pm \sqrt{7s+3}$

(l) $m = 2 \pm n$ et $n = \pm(m-2)$

2. (m) $x > 3 - y$ et $y > 3 - x$

(n) $a < b - 4$ et $b > a + 4$

(o) $p \geqslant \frac{1}{5}(3q + 6)$ et $q \leqslant \frac{1}{3}(5p - 6)$

(p) $f \geqslant 2g + 1$ et $g \leqslant \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}$

(q) $\begin{cases} u \leqslant -2v \text{ et } v > 0 \\ u \geqslant -2v \text{ et } v < 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} v \leqslant -\frac{u}{2} \text{ et } v > 0 \\ v \geqslant -\frac{u}{2} \text{ et } v < 0 \end{cases}$

(r) $\begin{cases} a > \frac{1}{b-1} \text{ et } b > 1 \\ a < \frac{1}{b-1} \text{ et } b < 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} b > \frac{1}{a} + 1 \text{ et } a > 0 \\ b < \frac{1}{a} + 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}$

3. Résolution des équations ou systèmes d'équations par substitution, combinaison linéaire ou autre.

(s) $\begin{cases} \alpha - 2 = 4 \\ 2\beta + 3\alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 4 + 2 = 6 \\ 2\beta = -3\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = -\frac{3}{2} \times 6 = -9 \end{cases}$

(t) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 + y \\ (1+y) + y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y = 3 - 1 \\ x = 1 + y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{2}{2} = 1 \\ x = 1 + 1 = 2 \end{cases}$

(u) $\begin{cases} 3a + 2b - 4 = 0 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(3a + 2b - 4) - 3(2a - 3b) = 2 \times 0 - 3 \times 1 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 6a + 4b - 8 - 6a + 9b = -3 \\ 2a = 1 + 3b \end{cases} \iff \begin{cases} 13b = -3 + 8 \\ a = \frac{1}{2}(1 + 3b) \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{5}{13} \\ a = \frac{1}{2}(1 + 3\frac{5}{13}) = \frac{14}{13} \end{cases}$

(v) $\begin{cases} 2u - 4v = 3u - 7v + 1 \\ 5u + 2v - 4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3u - 2u = 7v - 4v - 1 \\ 5(3v - 1) + 2v - 4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} u = 3v - 1 \\ 17v = 1 + 4 + 5 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} v = \frac{10}{17} \\ u = 3\frac{10}{17} - 1 = \frac{13}{17} \end{cases}$

(w) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 6y=7+4x \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-3y=5 \\ -4x+6y=7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(2x-3y)+(-4x+6y)=5+7 \\ -4x+6y=7 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} 4x-6y-4x+6y=12 \\ -4x+6y=7 \end{cases} \iff x,\ y \in \varnothing$

(x) $\begin{cases} m-2n+3=0 \\ 4n=2m+6 \end{cases} \iff \begin{cases} m-2n+3=0 \\ 2m-4n+6=0 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} 2(m-2n+3)-(2m-4n+6)=2\times 0-0 \\ m=2n-3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2m-4n+6-2m+4n-6=0 \\ m=2n-3 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} 0m+0n=0 \\ m=2n-3 \end{cases} \iff n \in \mathbb{R}$ et $m=2n-3$

(y) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+z=4 \\ 3x+2z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} z=x+y-2 \\ 2x-y+(x+y-2)=4 \\ 3x+2(x+y-2)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} z=x+y-2 \\ 3x=4+2 \\ 2y=1-5x+4 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} x=\frac{6}{3}=2 \\ y=\frac{1}{2}(5-5\times 2)=-\frac{5}{2} \\ z=2-\frac{5}{2}-2=-\frac{5}{2} \end{cases}$

(z) $\begin{cases} a+2b+c=4 \\ 2a-3b+5c=0 \\ 3a-b+2c=1 \end{cases} \iff \begin{cases} c=4-a-2b \\ 2a-3b+5(4-a-2b)=0 \\ 3a-b+2(4-a-2b)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} c=4-a-2b \\ -3a-13b=-20 \\ a-5b=1-8 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} a=5b-7 \\ c=4-(5b-7)-2b \\ 3(5b-7)+13b=20 \end{cases} \iff \begin{cases} 28b=20+21 \\ a=5b-7 \\ c=4+7-7b \end{cases} \iff \begin{cases} b=\frac{41}{28} \\ a=5\times\frac{41}{28}-7=\frac{9}{28} \\ c=11-7\times\frac{41}{28}=\frac{3}{4} \end{cases}$

10 Entre parenthèses

$A(x)=x+4, \qquad B(x)=3x-2, \qquad C(x)=7-x \qquad$ et $\qquad D(x)=1-2x.$

1. (a) $-4B(x)=8-12x$
   (b) $C(x)-3D(x)=5x+4$
   (c) $-3A(x)-5C(x)=2x-47$
   (d) $A(x)B(x)=3x^2+10x-8$
   (e) $C(x)D(x)=2x^2-15x+7$
   (f) $A^2(x)D(x)=-2x^3-15x^2-24x+16$
   (g) $B(x)C(x)-A(x)D(x)=-x^2+30x-18$
   (h) $5B^2(x)-4C^2(x)=41x^2-4x-176$
   (i) $-5D^3(x)=40x^3-60x^2+30x-5$
   (j) $B^4(x)=81x^4-216x^3+216x^2-96x+16$
   (k) $-2B(x)A^2(x)-3C^2(x)D(x)=-131x^2+272x-83$
   (l) $\frac{A(x)}{B(x)C(x)}-\frac{B(x)}{C(x)D(x)}=\frac{-11x^2+5x}{6x^3-49x^2+51x-14}$
2. (m) $A(-6)=-2$
   (n) $B(-4)=-14$
   (o) $C(-3)-D(-4)=1$
   (p) $C^2(-1)=64$
   (q) $D^2(-\frac{3}{2})=16$
   (r) $-3D(-1)C(-4)A(-5)=99$
3. (s) $A(x^2)=x^2+4$
   (t) $D(x+1)=-2x-1$
   (u) $B(3-2x)=7-6x$
   (v) $-4A(x-3)=-4x-4$
   (w) $-3B(5-3x^2)=27x^2-39$
   (x) $-2D^2(4-2x^2)=-32x^4+104x^2-98$
   (y) $C(4-x^2)D(2x+4)=-4x^3-7x^2-12x-21$
   (z) $\frac{B(2x+1)-C(3x-1)}{A(x-1)D(3-4x)}=\frac{9x-7}{8x^2+17x-21}$

11 VouF ?

(a)	V	(e)	F	(i)	V	(m)	F	(q)	F	(u)	F	(y)	F
(b)	F	(f)	F	(j)	V	(n)	F	(r)	F	(v)	V	(z)	F
(c)	F	(g)	V	(k)	V	(o)	F	(s)	F	(w)	V		
(d)	F	(h)	V	(l)	F	(p)	F	(t)	F	(x)	F		

12 Affiner

Dans l'expression $f(x) = ax + b$, x est la variable dont dépend le nombre $f(x)$ tandis que a et b sont des paramètres, fixes pour chaque fonction. Lorsque $a \neq 0$, la racine de f est $-\frac{b}{a}$.

Fonction	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine	Racine éventuelle
$\alpha(x) = 2x - 1$	2	-1	$\frac{1}{2}$
$\beta(x) = 3 - 5x$	-5	3	$\frac{3}{5}$
$\gamma(u) = -\frac{4u}{3} - \frac{5}{7}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{21}{20}$
$\delta(y) = -6y$	-6	0	0
$\varepsilon(t) = 2$	0	2	$\varnothing$
$\zeta(z) = 3x + 2$	0	$3x + 2$	$\varnothing^*$
$\eta(x) = ax + b$	a	b	$-\frac{b}{a}$
$\theta(x) = b + ax$	a	b	$-\frac{b}{a}$
$\iota(x) = bx + a$	b	a	$-\frac{a}{b}$
$\kappa(a) = ax + b$	x	b	$-\frac{b}{x}$
$\lambda(b) = ax + b$	1	ax	$-ax$
$\mu(z) = ax + b$	0	$ax + b$	$\varnothing^*$

Fonction	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine	Racine éventuelle
$\nu(x) = -mx + 2p$	$-m$	$2p$	$\frac{2p}{m}$
$\xi(a) = 2ax - 3b$	$2x$	$-3b$	$\frac{3b}{2x}$
$o(x) = fx$	f	0	0
$\pi(f) = x + f$	1	x	$-x$
$\rho(z) = m^2z + p^2$	m^2	p^2	$-\frac{p^2}{m^2}$
$\sigma(m) = m^2z + p^2$	non affine		
$\tau(p) = m^2z + 3p + 1$	3	$m^2z + 1$	$-\frac{m^2z+1}{3}$
$\upsilon(x) = 3x - 4d - cx$	$3 - c$	$-4d$	$\frac{4d}{3-c}$
$\varphi(x) = \frac{ax}{b}$	$\frac{a}{b}$	0	0
$\chi(x) = \frac{3}{x}$	non affine		
$\psi(t) = 5 - \frac{2}{x}$	0	$5 - \frac{2}{x}$	$\varnothing^*$
$\omega(x) = Xx + X$	X	X	-1

* : sauf cas très particulier où l'ordonnée à l'origine est nulle aussi. La fonction est alors identiquement nulle et tout réel en est racine.

13 R.T.T. : le retour

- (α) $x = -2$
- (β) $c = \frac{3}{2}$
- (γ) $y \geqslant -\frac{9}{2}$
- (δ) $z \geqslant \frac{1}{6}$
- (ε) $t < 1$
- (ζ) $u > 1$
- (η) $0 < x \leqslant \frac{15}{2}$
- (θ) $y < -\frac{14}{3}$ ou $y > 0$
- (ι) $v = \pm\sqrt{7}$
- (κ) $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$
- (λ) $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (μ) $\varnothing$
- (ν) $x = 1$ ou $x = 2$
- (ξ) $p = -1$ ou $p = -\frac{5}{2}$
- (ο) $r < -1$ ou $r > 1$
- (π) $x \in \left[-\sqrt{6}\,;\sqrt{6}\right]$
- (ρ) $a \in \left]-2\,;3\right[$
- (σ) $x \leqslant -\frac{4}{3}$ ou $x \geqslant \frac{11}{2}$
- (τ) $b \in [-5\,;4]$
- (υ) $q \in \left]-22\,;3\right]$
- (φ) $p < \frac{3}{2}$
- (χ) $w \in \left]3\,;7\right[$
- (ψ) $\ell \in \mathbb{R}$
- (ω) $x < -7$ ou $x > -1$

14 À la dérive

$$
\begin{aligned}
a'(x) &= 33 - 42x \\
b'(x) &= 3x^2\left(-27x^6 + 56x^5 + 25x^2 + 32x - 56\right) \\
c'(x) &= -2\left(9x^2 - 71x + 102\right) \\
d'(x) &= \tfrac{-15}{(6-5x)^2} \\
e'(x) &= \tfrac{19}{(7-3x)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \tfrac{-12x^4+12x^3-30x^2+60x-11}{(2x^3-4x+5)^2} \\
g'(x) &= \tfrac{-4}{\sqrt{5-8x}} \\
h'(x) &= \tfrac{-28x}{(9-4x^2)\sqrt{9-4x^2}} \\
i'(x) &= \tfrac{-300x^7+810x^6-432x^5+205x^4-984x^3+714x^2-4x-6}{(6-5x)^4}
\end{aligned}
$$

15 Hélène & Eudes

1. (a) $e^{-x}e^2 = e^{2-x}$.

   (b) $(e^x)^3\, e^{-2x} = e^{3x-2x} = e^x$.

   (c) $\frac{e^{x-1}}{e^{x+2}} = e^{(x-1)-(x+2)} = e^{-3}$.

   (d) $\frac{e^{3u-2}\,e^{7-3u}}{e^{3-u}\,e^{u+2}} = e^{(3u-2+7-3u)-(3-u+u+2)} = e^0 = 1$.

2. (a) $(e^x + e^{-2x})^2 = (e^x)^2 + 2e^xe^{-2x} + (e^{-2x})^2 = e^{2x} + 2e^{-x} + e^{-4x}$

   (b) $(e^{-2x} - e^x)(e^{-2x} + e^x) = (e^{-2x})^2 - (e^x)^2 = e^{-4x} - e^{2x}$

(c) $(e^{3x}-e^{5x})^2=(e^{3x})^2-2e^{3x}e^{5x}+(e^{5x})^2=e^{6x}-2e^{8x}+e^{10x}$

3. (a) $e^{x^2}=e^{-x} \overset{\times e^x}{\iff} e^{x^2}e^x=e^{-x}e^x \iff e^{x^2+x}=1=e^0 \iff x^2+x=0 \iff x=0$ ou $x=-1$.

   (b) $e^{2x}<e^x \overset{e^x>0}{\iff} \frac{e^{2x}}{e^x}<1 \iff e^{2x-x}<e^0 \iff x<0$.

   (c) $e^{2x^2+3}=e^{7x} \iff e^{2x^2+3-7x}=e^0 \iff 2x^2-7x+3=0 \iff x=3$ ou $x=\frac{1}{2}$.

   (d) $e^{x+1}=e^{\frac{2}{x}} \iff x+1=\frac{2}{x} \overset{x\neq 0}{\iff} x^2+x-2=0 \iff x=1$ ou $x=-2$.

   (e) $3e^{2x}+e^x-4=0 \overset{y=e^x>0}{\iff} 3y^2+y-4=0 \iff y=1=e^0$ ou $y=-\frac{4}{3}<0 \Longrightarrow x=0$.

   (f) $e^x \leqslant e^{x^2-12} \iff e^{x^2-12-x}\geqslant e^0 \overset{\exp\ \text{strict.}\nearrow}{\iff} x^2-x-12\geqslant 0 \iff x\in\,]-\infty\,;-3\,]\cup[\,4\,;+\infty\,[$.

4. Pour $x>0$,

$a'(x)=\left(e^{2x+1}\right)'=(2x+1)'e^{2x+1}=2e^{2x+1}$.

$b'(x)=\left(e^{-x}+\sqrt{e^{2x}}\right)'=e^x-e^{-x}$ avec $\sqrt{e^{2x}}=\sqrt{(e^x)^2}=|e^x|=e^x$.

$c'(x)=[(x+1)e^{-x}]'=(x+1)'e^{-x}+(x+1)(e^{-x})'=1e^{-x}+(x+1)(-1)e^{-x}=-xe^{-x}$.

$d'(x)=\left[x\,e^{\sqrt{x}}\right]'=x'e^{\sqrt{x}}+x\left[e^{\sqrt{x}}\right]'=e^{\sqrt{x}}+x\left[\sqrt{x}\right]'e^{\sqrt{x}}=e^{\sqrt{x}}+x\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}=e^{\sqrt{x}}(1+\frac{\sqrt{x}}{2})$.

$f'(x)=\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)'=\frac{(e^x)'(e^x-1)-e^x(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=\frac{(e^x)(e^x-1)-e^x\,e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}$.

$g'(x)=\left(e^{\frac{1-x}{1+x}}\right)'=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'e^{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{-1(1+x)-1(1-x)}{(1+x)^2}\,e^{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{-2}{(1+x)^2}\,e^{\frac{1-x}{1+x}}$.

5. (a) $\frac{e^{\ln(8)}}{e^{3\ln(2)}}=\frac{8}{2^3}=1$.

   (b) $\ln(3)+\ln(\frac{1}{3})=\ln(3)-\ln(3)=0$.

   (c) $\ln(\sqrt{2}+1)+\ln(\sqrt{2}-1)=\ln[(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)]=\ln(2-1)=\ln(1)=0$.

   (d) $\ln(4)-\ln(9)-5\ln(2)+2\ln(3)+\ln(8)=2\ln(2)-2\ln(3)-5\ln(2)+2\ln(3)+3\ln(2)=0$.

   (e) $\frac{1}{2}\ln(16)-\frac{3}{2}\ln(4)+\ln(9)+\frac{1}{3}\ln(8)-\frac{1}{2}\ln(81)=\frac{1}{2}\ln(2^4)-3\ln(\sqrt{4})+\ln(3^2)+\frac{1}{3}\ln(2^3)-\ln(\sqrt{81})$
   $=\frac{4}{2}\ln(2)-3\ln(2)+2\ln(3)+\frac{3}{3}\ln(2)-\ln(3^2)=0\ln(2)+0\ln(3)=0$

   (f) $\ln(e^{a-b})-e^{\ln(a)}+\exp(\ln(b))=(a-b)-a+b=0$

   (g) $\exp(\ln(a)+\ln(b))-\exp(\ln(a)-\ln(b))=e^{\ln(a)}e^{\ln(b)}-\frac{e^{\ln(a)}}{e^{\ln(b)}}=ab-\frac{a}{b}$

   (h) $\ln(\frac{a}{b})-\ln(a^2)+\ln(\sqrt{b})+\frac{3}{2}\ln(\frac{a^2}{\sqrt{b}})=\ln(b)-\ln(a)-2\ln(a)+\frac{1}{2}\ln(b)+\frac{3}{2}.2\ln(a)-\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\ln(b)=\frac{3}{4}\ln(b)$

   (i) $\ln(a^2b)-\ln(b^2a)+\ln(\frac{a}{b^3})+2\ln(\frac{b}{a})-\frac{1}{2}\ln(a^4b^6)$
   $=2\ln(a)+\ln(b)-2\ln(b)-\ln(a)+\ln(a)-3\ln(b)+2\ln(b)-2\ln(a)-\frac{4}{2}\ln(a)-\frac{6}{2}\ln(b)$
   $=-2\ln(a)-5\ln(b)$

   (j) $\frac{3\ln(\frac{b}{a})+\ln(a^3)-\ln(\sqrt{b})}{\ln(\frac{b}{a})-2\ln(\sqrt{b})-\ln(\frac{1}{\sqrt{a^7}})}=\frac{3\ln(b)-3\ln(a)+3\ln(a)-\frac{1}{2}\ln(b)}{\ln(b)-\ln(a)-2\frac{1}{2}\ln(b)+\frac{7}{2}\ln(a)}=\frac{\frac{5}{2}\ln(b)}{\frac{5}{2}\ln(a)}=\frac{\ln(b)}{\ln(a)}$

L'espagnol en filière ECG

Bienvenue au lycée Cézanne !

En attendant de vous retrouver en septembre pour commencer le long travail qui vous mènera jusqu'au concours, que ce soit en LV1 ou en LV2, voici quelques conseils pour aborder la rentrée le plus efficacement et le plus sereinement possible :

➨ Pendant les vacances, vous pouvez utiliser les outils dont vous avez l'habitude (vos manuels du secondaire par exemple) pour **réviser la grammaire de base** : la construction des différents temps et modes, les déterminants (articles, possessifs, démonstratifs…), les pronoms (personnels, démonstratifs, indéfinis…), les négations, les prépositions et adverbes (notamment pour indiquer le temps et l'espace).

➨ En ce qui concerne le lexique, vous devez maîtriser la liste des **verbes le plus communs de l'espagnol** ci-jointe.

➨ Et pour commencer à **vous familiariser avec l'espagnol journalistique et l'actualité** au sens large (ce sera le cœur de notre travail), vous pouvez partir à la découverte des sites internet dédiés. Voici quelques liens utiles :

➨ Quotidiens : ▪ **WWW.ELPAIS.COM**, LE quotidien de référence, à consulter plusieurs fois par semaine !

Et pour varier les plaisirs :

- elmundo.es, www.abc.es, lavanguardia.es (España)
- www.clarin.com, www.pagina12.com.ar (Argentina)
- www.eluniversal.comn.mx, www.lajornada.unam.mx (México)
- www.eltiempo.com (Colombia)

➨ Radio/Télévision :
- www.rtve.es (Radio y Televisión Española) les contenus sont très variés : actualités, reportages… à visiter sans modération !
- https://cadenaser.com/ (Radio Cadena Ser, España)

➨ Divers :
- www.almendron.com (un blog qui est une mine d'informations, avec une compilation journalière d'articles d'opinion sur des points d'actualité –en espagnol, français et anglais–, ainsi que des articles sélectionnés sur l'histoire de l'Espagne…)
- www.espaces-latinos.org (une des très rares publications en français consacrées intégralement aux sociétés et cultures de l'Amérique latine)
- www.dw.com/es/ (servicio de radiodifusión internacional financiada por el presupuesto fiscal federal alemán, disponible en 30 idiomas, entre los cuales el español)
- www.france24.com/es/ (el equivalente para Francia)

¡Hasta pronto!

LOS VERBOS MÁS COMUNES DEL ESPAÑOL

ABRIR: *OUVRIR*
ACABAR [/TERMINAR]: *FINIR*
ACTUAR: *AGIR*
ANDAR: *MARCHER*
AYUDAR: *AIDER*
ACORDAR**SE** (ue) **(DE)** =
RECORDAR (ue): *SE SOUVENIR*
ACOSTAR(SE) (ue): *(SE) COUCHER*
AN**U**NCIAR: *ANNONCER*

BAILAR: *DANSER*
BAJAR: *DESCENDRE, BAISSER*
BASTAR: *SUFFIRE*
BEBER: *BOIRE*
BUSCAR: *CHERCHER*

CAER: *TOMBER*
CALLAR(SE): *(SE) TAIRE*
CAMBIAR: *CHANGER*
CAMINAR: *MARCHER*
CANTAR: *CHANTER*
CERRAR (ie): *FERMER*
COGER: *PRENDRE, RAMASSER*
COMER: *MANGER*
COMPRAR: *ACHETER*
CONOCER: *CONNAÎTRE*
CONSEGUIR (i): *OBTENIR, ARRIVER A*
CONSTRUIR: *CONSTRUIRE*
CORRER: *COURIR*
CORTAR: *COUPER*
CRE**ER**: *CROIRE*
CRE**AR**: *CRÉER*

DAR: *DONNER*
DEBER: *DEVOIR*
DECIDIR: *DÉCIDER*
DECIR (i) : *DIRE*
DEFENDER (ie): *DÉFENDRE*
DEJAR: *LAISSER*
DEPENDER: *DEPENDRE*
DESCANSAR: *(SE) REPOSER*
DESCRIBIR: *DECRIRE*
DESEAR: *DESIRER*
DESPERTAR (ie): *(SE) RÉVEILLER*
DESTRUIR: *DETRUIRE*
DIVERTIR (ie,i): *AMUSER*
DORMIR (ue,u): *DORMIR*

ECHAR: *JETER*
ELEGIR[i] [/ESCOGER/OPTAR POR]: *CHOISIR*
EMPEZAR (ie) [/COMENZAR(ie)] : *COMMENCER*
ENCONTRAR **(ue)** : *TROUVER ou RENCONTRER*
ENTENDER (ie) [/COMPRENDER]: *COMPRENDRE*
ENTRAR: *ENTRER*

EQUIVOCARSE: *SE TROMPER*
ESCONDER(SE): *(SE) CACHER*
ESCUCHAR: *ECOUTER*
ESCRIBIR: *ÉCRIRE*
ESPERAR: *ATTENDRE / ESPÉRER*
ESTAR: *ÊTRE, SE TROUVER*
ESTUDIAR: *ÉTUDIER*
EVOLU**CIO**NAR: *ÉVOLUER*
EXPRESAR(SE): *(S')EXPRIMER*

FALTAR: *MANQUER, FAIRE DEFAUT*
FAVOR**ECER**: *FAVORISER*
F**UNC**IONAR: *FONCTIONNER*

GANAR: *GAGNER*
GRITAR: *CRIER*
GUSTAR: *PLAIRE (→ AIMER)*

HABLAR: *PARLER*
HACER: *FAIRE*

INTENTAR Ø [/TRATAR DE]: *ESSAYER (DE)*
IR: *ALLER*
IRSE [/MARCHARSE/SALIR]: *S'EN ALLER, PARTIR*

JUGAR [ue]: *JOUER*

LEER: *LIRE*
LEVANTAR(SE): *(SE) LEVER*
LIMPIAR: *LAVER / NETTOYER*
LLAMAR(SE): *(S')APPELER*
LLEGAR: *ARRIVER*
LLENAR: *REMPLIR*
LLEVAR: *PORTER*
LLORAR (ue) : *PLEURER*
LLOVER (ue): *PLEUVOIR*
LUCHAR: *LUTTER*

MATAR: *TUER*
MIRAR: *REGARDER*
MORIR (ue,u): *MOURIR*
M**OS**TRAR (ue): *MONTRER*
MOVER(SE) (ue) : *BOUGER*

NECESITAR: *AVOIR BESOIN DE*

OFRECER = REGALAR: *OFFRIR*
OÍR: *ENTENDRE*
OLVIDAR: *OUBLIER*

PAGAR: *PAYER.*
PARECER: *SEMBLER, PARAITRE*
PASAR: *PASSER, SE PASSER*
PASEAR: *SE PROMENER*
PEDIR [i]: *DEMANDER.*
≠ PREGUNTAR: *DEMANDER (POSER UNE QUESTION)*

PENSAR (ie): *PENSER.*
PERDER (ie): *PERDRE*
P**E**RDONAR: *PARDONNER*
PERMITIR: *PERMETTRE*
PERTENECER: *APPARTENIR*
PREOCUPAR: *INQUIETER, PREOCCUPER*
PRESENTAR: *PRÉSENTER.*
PODER (ue/u): *POUVOIR.*
PONER: *METTRE, POSER*
PREFERIR (ie/i) : *PREFERER*
PRODUCIR: *PRODUIRE*
PROHIBIR: *INTERDIRE*
PROTEGER: *PROTÉGER*

QUEDAR(SE): *RESTER*
QUERER [ie]: *VOULOIR*
QUITAR: *ENLEVER*

RECIBIR: *RECEVOIR*
REFLEXIONAR: *REFLECHIR*
≠ REFLEJAR: *REFLETER*
RESP**E**TAR: *RESPECTER*
RESPONDER [/CONTESTAR]: *REPONDRE*
REUNIR: *RÉUNIR*
ROBAR : *VOLER, DEROBER*
SABER: *SAVOIR*
SACAR: *SORTIR, EXTRAIRE*
≠ SALIR: *SORTIR, PARTIR*
SALTAR: *SAUTER.*
SALVAR: *SAUVER*
SEGUIR (i): *SUIVRE ou CONTINUER*
SENTAR(SE) [ie]: *(S')ASSEOIR*
SENTIR[ie, i]: *SENTIR, RESSENTIR*
SER: *ÊTRE*
SOLTAR [ue]: *LÂCHER*
SONAR [ue]: *SONNER, RESONNER*
(SON)REÍR [i]: *(SOU)RIRE*
SOÑAR [ue]: *RÊVER*
SUBIR: *MONTER*
≠ SUFRIR: *SOUFFRIR, SUBIR*
SUPONER: *SUPPOSER*

TENER [ie]: *AVOIR*
TOCAR: *TOUCHER*
TOMAR: *PRENDRE*
TRABAJAR: *TRAVAILLER*
TRAER: *APPORTER*

USAR [/UTILI**Z**AR]: *UTILISER*

VENDER: *VENDRE*
VENIR (ie,i): *VENIR*
VER: *VOIR*
VIAJAR: *VOYAGER*
VIVIR: *VIVRE*
VOLAR (ue): *VOLER*
VOLVER (ue) [/REGRESAR]: *REVENIR*

Mathématiques Approfondies ECG1 : travail estival

Eté 2023

Table des matières

I Introduction

Bonjour à chacun et chacune d'entre vous. Le travail proposé en Mathématiques dans ce document se décompose en deux parties, autour de deux thèmes. Je vous souhaite évidemment un bel été et vous dis à la rentrée .

QUESTION : comment utiliser ce document de travail ?

REPONSE : Lire avec soin ce qui est indiqué ci dessous avant de commencer ...

I.1 Premier thème : bases de calcul

Il faut être au point sur les techniques relatives aux bases de calcul : quotients , puissances , racines carrées , calcul littéral ainsi que le travail sur les égalités et inégalités.
Vous allez donc trouver , dans ce document , des éléments de cours ainsi que des exemples , exercices qui vous permettront de commencer la rentrée avec des acquis renforcés sur ces points.
Ces techniques de calcul doivent être connues et maîtrisées du mieux possible , afin de rendre le travail plus efficace et plus fluide dès le départ.

1. Paragraphes 2 (Notion d'ensemble) à 5 (Résolutions) inclus : ils comportent de nombreuses règles et techniques à connaître. Quotients , puissances , équations , bref , les taches travaillées les années antérieures sont là.
   En parcourant ces pages (paragraphes 2 à 5) : vous verrez que chaque fois , il y a des exemples , complets (ou non) qui sont traités . A lire avec soin .
   Chaque fois que vous rencontrez le message « **A FINIR** » cela signifie que **vous devez finir ce qui est demandé** . Vous trouverez également **les preuves** de certaines propriétés , déjà surement rencontrées dans les années antérieures : évidemment , ces preuves sont à lire , comprendre , nous démontrerons de nombreux énoncés cette année .
2. En parcourant ces pages (paragraphes 2 à 5) : vous allez rencontrer également des renvois « **Voir exercices : ....** » . Les énoncés se trouvent pages 11 et 12 .**Vous devez traiter** dans les exercices , les numéros et/ou énoncés qui sont en rouge . Par exemple : dans l'exercice 1 : A - C - D - G - I.
   Les corrections (partielles) se trouvent pages 13 à 15 .
   A l'aide des exemples donnés , vous devez être assez autonome dans ce travail et bien avancer sur ce qui est proposé .

   Quelques précisions et conseils néanmoins :
   (a) Faire l'exercice 1 , par exemple , avec une calculatrice ne sert strictement à rien , **puisqu'il n'y a pas de calculatrice en Mathématiques lors des concours** . La machine peut vous servir pour vérifier certains calculs (c'est très bien) , mais elle ne peut pas remplacer certaines étapes de calcul ...
   (b) Les exercices sont à traiter , calculs complets , par écrit : la correction n'est là que pour vous aider **une fois que vous avez cherché (et résolu) l'exercice** : une simple lecture de la correction , sans autre travail (ou questionnement personnel) ne sert à rien .

   Un bilan sera fait dès la rentrée sur les points évoqués et ils seront évalués lors du premier DS de Mathématiques .

I.2 Deuxième thème : les classiques de 1ère et Terminale

Je vous propose quelques exercices , pages 16 et 17 . Ils permettent de se replonger au coeur du programme de 1ère et Terminale. Ces points seront évalués lors du premier DS de Mathématiques , qui arrive tôt .

1. Exercice A : un vrai / faux qui mérite réflexion . Cet exercice préparera un des premiers chapitres , axé sur les *raisonnements*.
2. Exercice B : quelques connaissances sur les suites . A compléter par un travail de révision sur les suites :
   — Suites arithmétiques, géométriques , limites .
   — Suites : monotonie , convergence .
3. Exercice C : une étude de fonction . Cette étude , sur une fonction exponentielle , doit être complétée par un travail de révision sur les connaissances de 1ère et Terminale concernant :
   — Dérivation : les formules usuelles.
   — Travail sur les limites : fonctions usuelles, limites classiques, croissances comparées.
   — Courbes représentatives des fonctions usuelles .
4. Exercice D : quelques résolutions d'équations avec les fonctions usuelles . L'occasion de retravailler sur la fonction ln , domaine de définition ... ainsi que la technique de résolution (q3) de l'équation $|A| = |B|$.
5. Exercice E : une autre étude de fonction , parce qu'une étude ne suffit pas.

Ces exercices A - B - C - D - E sont à rendre le jour de la rentrée sur une copie soignée.

II Notion d'ensemble

Définition 1

1. $\mathbf{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels . $\mathbf{N} = \{0;1;2;3;4;\ldots\}$ On note $\mathbf{N}^*$ l'ensemble $\mathbf{N}$ privé de 0.
2. $\mathbf{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs . $\mathbf{Z} = \{\ldots;-3;-2;-1;0;1;2;3\ldots\}$
3. $\mathbf{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels . $\mathbf{Q} = \left\{\frac{a}{b}, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N}^*\right\}$.
4. $\mathbf{R}$ est l'ensemble des nombres réels : il contient $\mathbf{Q}$ et les nombres irrationnels comme $\pi, \mathrm{e}, \sqrt{2}, \ldots$. $\mathbf{R}$ contient tous les nombres connus à l'issue de la classe de Terminale.

Remarque 1 : (s) on rappelle que $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, ($\mathbf{D}$ est rappelé ci dessous) et citons encore certains ensembles fondamentaux , à savoir :

1. L' **ensemble vide**, noté $\varnothing$, qui ne contient aucun élément .
2. L'ensemble des nombres décimaux $\mathbf{D} = \left\{\frac{a}{10^n}, a \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\right\}$. (quotient d'un entier relatif par une puissance de 10)
3. $\mathbf{R}_+$=$\{x \in \mathbf{R}, x \geq 0\}$ (ensemble des nombres réels positifs)
4. $\mathbf{R}_-$=$\{x \in \mathbf{R}, x \leq 0\}$ (...)
5. $\mathbf{R}^*$=$\{x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$ (ensemble des nombres réels non nuls , soit $\mathbf{R}$ privé de 0).

III Calculs dans R

III.1 Quotients

On rappelle que le quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres réels a et b est défini uniquement que lorsque $b \neq 0$.

Propriété 1 : a , b , c , d sont des nombres réels . Les dénominateurs des quotients ci dessous sont non nuls .

1. $\frac{a}{1} = a$
2. $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$
3. $\frac{a \times \mathbf{c}}{b \times \mathbf{c}} = \frac{a}{b}$
4. $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$
5. $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$
6. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$
7. $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$
8. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

▷ *Exemple 1* : (s)

$$\frac{-2}{7} + \frac{3}{7} \times 5 = \frac{-2}{7} + \frac{15}{7} = \frac{13}{7} . \quad \frac{-4+\frac{2}{3}}{5+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{-12}{3}+\frac{2}{3}}{\frac{10}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{-10}{3}}{\frac{11}{2}} = \frac{-10}{3} \times \frac{2}{11} = \frac{-20}{33} .$$

Voir exercices : 1 - 2

III.2 Puissances

Définition 2

Soit $a \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. On définit $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (a non nul) .Par convention , lorsque $a \neq 0$, $a^0 = 1$.

▷ *Exemple 2* : $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125 \quad (-2)^7 = -128 . \quad (2)^{-7} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} \quad (-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$.

Propriété 2 : $n \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{Z}$ et $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}^*$.

1. $a^n a^m = a^{n+m}$
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. $(a^n)^m = a^{nm}$
4. $a^n \times b^n = (ab)^n$
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

▷ *Exemple 3* : $5^3 \times 5^6 = 5^9 \quad (-2)^7 \times (-2)^{-3} = (-2)^4 . \quad \frac{4^8}{4^5} = 4^3 = (2^2)^3 = 2^6 \quad \left(\frac{5}{3}\right)^7 = \frac{5^7}{3^7} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^4} = \frac{1}{4}$

Voir exercices : 3

Propriété 3 : (identités remarquables) : $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

▷ *Exemple 4* : $A = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 \quad B = (3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4 \quad C = (10x-5)(10x+5) = 100x^2 - 25$

▷ *Exemple 5* : (développement usuel) a , b , c sont des nombres réels

$D = (a+b+c)^2 = (a+b+c) \times (a+b+c) = \ldots$ $\boxed{\text{A FINIR}}$

$E = (a+b)^3 = (a+b)^2 \times (a+b) = \cdots = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\boxed{\text{A FINIR}}$.

Voir exercices : 4

III.3 Racine carrée

Définition 3

Soit $a \in \mathbf{R}_+$. La racine carrée de a est le nombre réel positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est égal à a.
Il vérifie $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$.

▷ *Exemple 6* : (en utilisant la propriété ci dessous)

$\sqrt{25} = 5 \quad \sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = \sqrt{100} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2} \quad \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3 \quad \dfrac{8}{\sqrt{2}} = \dfrac{8 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

Propriété 4 : opérations .

1. Si $a \in \mathbf{R}_+$ et $b \in \mathbf{R}_+$, alors : $\quad \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad$ et $\quad$ (avec $b \neq 0$) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
2. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Il n'y a pas de « règle » sur l'addition et la soustraction ...

Complément (**expression conjuguée**) . Il s'agit d'écrire sans racine carrée au dénominateur l'expression $\dfrac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{1 \times \left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3} .$$

On dit que $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ est l'**expression conjuguée** de $\sqrt{5} - \sqrt{2}$.

Voir exercices : 5 - 6 - 7- 8 - 9

IV Ordre dans R

IV.1 Travail sur égalités

Pour montrer , en Mathématiques , une égalité du type $A = B$, il y a plusieurs méthodes . Parmi celles ci (et nous en reverrons d'autres cette année) :

1. On part de l'expression A et on « travaille » (développement , factorisation , regroupements de termes , etc) $A = \cdots = \ldots$ et on obttient à l'issue des calculs l'expression B .
2. Même méthode , mais en partant de B pour obtenir A .
3. Toujours même principe , mais cette fois ci , en travaillant sur A , on obtient C (et pas B , hélas) . Il faut terminer le travail et pour cela partir de B pour obtenir C également .

▷ *Exemple 7* : montrer que pour tout réel $x > 1$, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} - \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}$.
(i) Se poser quand même la question : pourquoi $x > 1$?
(ii) Pour le traitement de la question elle même , il semble judicieux de commencer à travailler sur le membre de gauche , en recherchant un dénominateur commun .

Soit $x > 1$: $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} - \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{x+1}\times\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}\times\sqrt{x+1}} - \dfrac{\sqrt{x-1}\times\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\times\sqrt{x-1}} = \ldots$ **A FINIR** , en utilisant def 3 et P4 .

Voir exercices : 10 - 11

IV.2 Travail sur inégalités

Définition 4

On **définit** un ordre sur **R** : $a \leq b$ (on lit « a est inférieur ou égal à b ») lorsque $a - b \leq 0$ ou encore lorsque $b - a \geq 0$.

▷ *Exemple 8* : montrer que pour tous nombres x et y réels , $xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$.
Soit $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$. En utilisant la définition ci dessus , on va montrer ici que $\dfrac{x^2+y^2}{2} - xy \geq 0$.
$\dfrac{x^2+y^2}{2} - xy = \dfrac{x^2+y^2-2xy}{2} = \dfrac{(x-y)^2}{2}$. Ce quotient est positif , d'où le résultat attendu .

Propriété 5 : (Opérations sur une inégalité) . Soit $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}$.

1. Si $a \leq b$, alors pour tout nombre réel c , $a + c \leq b + c$.
2. Si $a \leq b$, alors pour tout nombre réel c **positif** , $a \times c \leq b \times c$.
3. Si $a \leq b$, alors pour tout nombre réel c **négatif** , $a \times c \geq b \times c$.

Preuve : point 2 . On utilise ici également la définition : soit a, b, c trois nombres réels tels que $a \leq b$ et $c \geq 0$.
On étudie le signe de $b \times c - a \times c$.
$b \times c - a \times c = c \times (b - a)$: il s'agit du produit de deux facteurs positifs , donc le produit est positif .
On conclut que $a \times c \leq b \times c$.

□

Remarque 2 : on peut également travailler avec des inégalités strictes dans la propriété ci dessus :

Si $a < b$ et $c > 0$, alors $a \times c < b \times c$

▷ *Exemple 9* : $x \in [3, 7]$: encadrer $-4x + 10$. (utilisation de P5)
Soit x tel que $3 \leq x \leq 7$. Alors $-28 \leq -4x \leq -12$ (attention au sens) puis $-28 + 10 \leq -4x + 10 \leq -12 + 10$.
On conclut $-4x + 10 \in [-18, -2]$.

Propriété 6 : (avec deux inégalités)

1. Addition : a,b,c,d sont quatre nombres réels . Si $\begin{cases} a \leq b \\ \text{et} \\ c \leq d \end{cases}$ alors $a+c \leq b+d$.

2. Produit : a,b,c,d sont quatre nombres réels **positifs** . Si $\begin{cases} 0 \leq a \leq b \\ \text{et} \\ 0 \leq c \leq d \end{cases}$ alors $0 \leq a \times c \leq b \times d$.

Preuve : on utilise toujours la définition .... On soustrait et on étudie le signe de la différence .
Point 1 : soit a,b,c,d quatre nombres réels : $b+d-(a+c) = b+d-a-c = b-a+d-c = (b-a)+(d-c)$ Il faut un argument pour finir la preuve . **A FINIR**

Point 2 : soit a,b,c,d sont quatre nombres réels **positifs** . $bd-ac = bd-bc+bc-ac = \dots$: il faut terminer de « modifier » cette écriture de façon à pouvoir utiliser les renseignements sur les réels a,b,c,d . **A FINIR**

$\square$

Pas de soustraction ou de division membre à membre ... soustraire un nombre , c'est ajouter son opposé , il y a donc une multiplication par (-1) ... gare au sens ! (Voir ci après) Et une division , c'est un produit par l'inverse , voir P8 et exemple 12 .

▷ *Exemple 10* : x et y sont deux nombres réel tels que $3 \leq x \leq 7$ et $1 \leq y \leq 4$. Donner un encadrement des nombres suivants $A = 4x-5y \quad B = (x-2)(y+5)$.
Pour A : on commence par encadrer $4x$, puis $5y$ et (attention P5) $-5y$: on conclut avec la propriété précédente P6.1 en utilisant $A = 4x+(-5y)$. **A FINIR**
Pour B : on commence par encadrer $x-2$ puis $y+5$: on peut utiliser directement la propriété précédente P6.2 (il faut préciser pourquoi) pour terminer . **A FINIR**

Propriété 7 : (Carré , Racine carrée)

1. Deux nombres a et b positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés .
   Autrement dit : pour tous a et b nombres réels positifs , $a \leq b$ est équivalent à $a^2 \leq b^2$.
2. Deux nombres a et b positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées .
   Autrement dit : pour tous a et b nombres réels positifs , $a \leq b$ est équivalent à $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Preuve : point 1 . Soit $a \geq 0$ et $b \geq 0$. On détermine une fois encore le signe de la différence b^2-a^2 .
$b^2-a^2 = (b-a)(b+a)$. Le facteur $b+a$ est positif (la somme de deux nombres positifs est positive) . On peut en déduire que le signe de b^2-a^2 est celui de $b-a$ (règle des signes) . Les nombres de départ a et b et leurs carrés a^2 et b^2 sont bien rangés dans le même ordre , ce qui est le résultat attendu .

$\square$

▷ *Exemple 11* : x est un nombre réel tel que $2 \leq x \leq 5$. Donner un encadrement de $-3x^2+10$.
On sait (point de départ) que $2 \leq x \leq 5$: les nombres sont positifs , on utilise la propriété précédente , et on déduit $4 \leq x^2 \leq 25$.
Il ne reste plus qu'à encadrer $-3x^2$ (attention P5) et enfin $-3x^2+10$. **A FINIR**

Propriété 8 : (Inverse)

1. Deux nombres a et b strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses .
   Autrement dit : pour tous a et b nombres réels strictement positifs , $0 < a \leq b$ est équivalent à $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$.
2. Deux nombres a et b strictement négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses .
   Autrement dit : pour tous a et b nombres réels strictement négatifs , $a \leq b < 0$ est équivalent à $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$.

Preuve : point 1 . Même méthode que dans la preuve précédente . Soit $a > 0$ et $b > 0$. On détermine une fois encore le signe de la différence $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.
$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1 \times b}{ab} - \frac{1 \times a}{ba} = \frac{b-a}{ba}$. Le dénominateur ba est strictement positif : le signe de $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ est donc celui de $b-a$. Les nombres de départ a et b et leurs inverses $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ sont bien rangés dans l'ordre contraire , ce qui est le résultat attendu .

$\square$

▷ *Exemple 12* : x et y sont deux nombres réels tels que $4 < x < 10$ et $-1 < y < 2$. Donner un encadrement de : $\dfrac{x-2}{y+5}$.
On commence par un encadrement de $x-2$ et $y+5$: $2 < x-2 < 8$ et $4 < y+5 < 7$.
Attention , pas de division membre à membre , voir haut de page . On doit utiliser que $\dfrac{a}{b} = a \times \dfrac{1}{b}$. Ici , on construit donc un encadrement de $\dfrac{1}{y+5}$, soit $\dfrac{1}{7} < \dfrac{1}{y+5} < \dfrac{1}{4}$ (attention P8) .
On termine en utilisant P6 (pourquoi ?) et $\dfrac{x-2}{y+5} = (x-2) \times \dfrac{1}{y+5}$. **A FINIR**

Voir exercices : 12 et 13

Remarque 3 : (s) A SAVOIR

1. Le cadre de travail , dans une inégalité est **fondamental** : à partir de l'égalité $a < b$, sans autre renseignement sur a et b , puis je *comparer* les carrés de ces deux nombres ? La réponse est ... non .
   $-3 < 2$ et $9 > 4$, mais $-3 < 4$ et $9 < 16$, essayez d'autres choix de valeurs pour a et b afin de vous convaincre . On doit connaitre le signe de a et b , évoqué dans le point suivant : le sens de variation de la fonction carré sur $\mathbf{R}$. Même précaution pour les inverses .
2. P7 et P8 peuvent être avantageusement remplacées par les propriétés portant sur le sens de variation des fonctions de référence : $x \to x^2$, $x \to \sqrt{x}$, $x \to \dfrac{1}{x}$ ainsi que (Première et Terminale) $x \to \exp(x)$ et $x \to \ln(x)$. Rappeler le domaine de définition $\mathscr{D}$ et le sens de variation sur $\mathscr{D}$ de chacune de ces fonctions (tableau de variations) puis construire un petit tracé (simple) de leur courbe représentative. Lorsque $-3 \leq x \leq 4$, donner un encadrement de x^2 . **A FINIR**

V Résolutions dans R

Dans ce paragraphe , l'occasion de revoir les techniques de résolution d'équations et inéquations rencontrées lors de la scolarité .

V.1 Equations

V.1.1 Equations du premier degré

▷ *Exemple 13* : résoudre dans **R** les équations suivantes : (a) $2x-9=6$ (b) $4x+10=x-7$ (c) $3(2x-7)=10-(x+8)$
Résolution : on utilise le symbole $\Leftrightarrow$, que nous manipulerons cette année : il signifie « est équivalent à » : à utiliser néanmoins avec précaution dans la rédaction ... nous en reparlerons de façon plus approfondie cette année .

b) $4x+10=x-7 \Leftrightarrow 4x-x+10=-7 \Leftrightarrow 3x=-7-10 \Leftrightarrow x=\frac{-17}{3}$. On conclut : $\boxed{S=\left\{\frac{-17}{3}\right\}}$.

c) $3(2x-7)=10-(x+8)$. On commence par développer l'expression . $3(2x-7)=10-(x+8) \Leftrightarrow 6x-21=10-x-8$.
On est revenu au cas b) . **A FINIR**

V.1.2 Equations du second degré

Définition 5

a , b , c sont trois nombres réels et $a \neq 0$. Le nombre $\Delta=b^2-4ac$ est appelé le discriminant du trinôme ax^2+bx+c .

Propriété 9 : Résolution dans **R** de l'équation $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$).

1. Si $\Delta>0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
   La forme factorisée du trinôme est : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.
2. Si $\Delta=0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une unique solution solution $x_0=\frac{-b}{2a}$.
   La forme factorisée du trinôme est : $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$.
3. Si $\Delta<0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet aucune solution réelle .
   Il n'existe pas de forme factorisée (dans R) du trinôme .

▷ *Exemple 14* : résoudre dans **R** l'équation du second degré $4x^2+1=2x^2-x+7$.
On se ramène à la forme $ax^2+bx+c=0$, soit $2x^2+x-6=0$. On applique ensuite les techniques connues , voir P9 ci dessus. **A FINIR**

Remarque 4 : (s)

1. La forme développée n'est pas une fin en soi ... certaines équations se résolvent aisément à l'aide d'une factorisation pour obtenir une situation de produit nul : beaucoup plus efficace en terme de calculs.
   Exemple : résolution de l'équation $8(x-3)^2+5x(x-3)=0$.
   $8(x-3)^2+5x(x-3)=0 \Leftrightarrow (x-3)[8(x-3)+5x]=0 \Leftrightarrow (x-3)[13x-24]=0$ **A FINIR**
2. L'utilisation de Δ n'est pas une fin en soi ...
   (i) L'équation $3x^2+10=0$ n'admet pas de solution ! Pourquoi ?
   (ii) L'équation $x^2-8=0$ se résout sans utiliser Δ .
   $x^2-8=0 \Leftrightarrow x^2-\left(\sqrt{8}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{8}\right)\left(x+\sqrt{8}\right)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}$.
   On conclut : $\boxed{S=\left\{2\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right\}}$.

Voir exercices : 14

V.1.3 Equations se ramenant aux cas précédents (domaine éventuel)

▷ *Exemple 15* : résoudre dans **R** l'équation $\frac{2x+4}{x-1}+1=0$.
(i) Il y a une contrainte sur l'existence du quotient , à savoir $x-1 \neq 0$.
La valeur $x=1$ est exclue du domaine $\mathscr{D}$ de résolution : $\boxed{\mathscr{D}=\mathbf{R}\setminus\{1\}}$.

(ii) On résout l'équation sur $\mathscr{D}$: soit $x \in \mathscr{D}$ (c'est à dire $x \neq 1$) .
$\dfrac{2x+4}{x-1}+1=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+4}{x-1}+\dfrac{x-1}{x-1}=0 \Leftrightarrow \dfrac{3x+3}{x-1}=0$.
Rappel : (nullité du quotient) $\dfrac{A}{B}=0$ si et seulement si $A=0$ et $B\neq 0$ (existence du quotient) .
Lorsque $x\in\mathscr{D}$: $\dfrac{3x+3}{x-1}=0 \Leftrightarrow 3x+3=0 \Leftrightarrow x=-1$.
(iii) $-1\in\mathscr{D}$ (la solution obtenue appartient au domaine $\mathscr{D}$) donc -1 est bien solution de l'équation . $\boxed{S=\{-1\}}$

Voir exercices : 15

V.2 Inéquations

V.2.1 Inéquations du premier degré

▷ *Exemple 16* : résoudre dans $\mathbf{R}$ les inéquations suivantes : (a) $3x+5<4x-8$ (b) $-5x+1>16$ (c) $5(2x+4)>3(x-7)$
(a) $3x+5<4x-8 \Leftrightarrow 3x-4x+5<-8 \Leftrightarrow -x<-8-5 \Leftrightarrow x>13$ (P5) . On conclut : $\boxed{S=]13,+\infty[}$. **A FINIR**

V.2.2 Inéquations du second degré (ou plus complètes)

Propriété 10 : a , b , $c\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$, $\Delta=b^2-4ac$.

1. Si $\Delta>0$, le trinôme ax^2+bx+c est du signe de $-a$ entre les racines x_1 et x_2 et du signe de a à l'extérieur des racines.
2. Si $\Delta\leq 0$, le trinôme ax^2+bx+c est toujours du signe de a .

1. si $\Delta>0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

2. Si $\Delta=0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

3. si $\Delta<0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

Remarque 5 : comme précisé en *remarque 4* , la forme développée n'est pas une fin en soi . Dans le cas où l'inéquation se ramène directement à l'étude du signe d'un trinôme , on utilise directement P10 ci dessus . Mais dans certains exemples , un travail préliminaire sur l'écriture (factorisation par exemple) est préférable .

▷ *Exemple 17* : résoudre dans $\mathbf{R}$ les inéquations suivantes . (a) $3x^2-5x<x^2+6x-1$ (b) $x(x+2)^2>(3x-1)(2x+4)^2$
(a) $3x^2-5x<x^2+6x-5 \Leftrightarrow 2x^2-11x+5<0$. On peut utiliser P10 .On obtient $\boxed{\mathscr{S}=\left]\frac{1}{2},5\right[}$. **A FINIR**
(b) $x(x+2)^2>(3x-1)(2x+4)^2 \Leftrightarrow x(x+2)^2>(3x-1)2^2(x+2)^2 \Leftrightarrow x(x+2)^2-4(3x-1)(x+2)^2>0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2[x-4(3x-1)]>0$
On se retrouve à étudier le signe d'un produit de deux facteurs , dont le premier $(x+2)^2$ est ... **A FINIR**

Voir exercices : 16 - 17

VI Exercices

VI.1 Techniques de base

Exercice 1 : calculer les quotients suivants , donner le résultat sous forme de quotients irréductibles . $A-C-G-D-I$

$A=\frac{1}{2}+5-\left(4+\frac{-1}{4}\right)$ $B=\frac{5}{2}+\frac{-5}{8}$ $C=\left(\frac{5}{3}+\frac{5}{2}\right)-\left(4+\frac{3}{5}\right)$ $D=\frac{\frac{-3}{2}+\frac{4}{7}}{\frac{-1}{3}+\frac{7}{6}}$ $E=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}$

$F=\frac{3}{4}\times(-2)$ $G=\frac{7}{2}\times\frac{-4}{49}$ $H=\left(\frac{5}{3}\times\frac{5}{2}\right)-\left(-2\times\frac{3}{9}+\frac{1}{3}\right)$ $I=\frac{-2}{-5}\times 3+4\times\frac{9}{10}$

Exercice 2 : simplifier les expressions suivantes afin d'obtenir un seul quotient . $A-D-E$

$A=\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x+2}$ $B=\frac{3x+2}{x}-\frac{x-1}{4}$ $C=\frac{x}{x-3}-5\times\frac{x+1}{x-2}$ $D=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$ $E=\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}$

Exercice 3 : simplifier les expressions suivantes : $B-D-F-H-I-J-L$

$A=2^3\times 2^5$ $B=(-3)^6\times(-3)^4\times(-3)^{-5}$ $C=10^4\times 2^5\times 5^7$ $D=(ab)^3\times a^2$

$E=(ab)^4\times a^3\times b^5$ $F=(2^3)^4\times 3^2\times 6^5$ $G=\frac{10^3\times 10^7}{10^5\times 10^{-3}}$ $H=8\times(3\times 4)^7\times 2^4\times 9^5$

$I=8^{n+3}\times 4^n\times 16^{n+1}$ $J=\frac{a^{n+1}\times a^{n-1}}{a^{3n-2}\times a^{n+5}}$ $K=(-3)^5\times 3^6\times(-9)^7$ $L=(-1)^7+(-1)^{10}+(-1)^3-(-1)^6$

Exercice 4 :

1. Développer les expressions suivantes : c - e - f - g - h - i

   (a) $(2x-4)^2$
   (b) $(x+3)^2-(x-5)^2$
   (c) $(x+x^2+1)(x+x^2)$
   (d) $(x+3)^3$
   (e) $a(ab+b^2)-b(ab+a)$
   (f) $(2a+b)^2-(a+b)^2$
   (g) $3(a-4)(a+4)-24(a-2)$
   (h) $(a+2b)(2a-b)+a(a+b)$
   (i) $(x+3y+5)^2$

2. Factoriser les expressions suivantes : a - b - c -d - e - f - g - h - i

   (a) $4x^3+8x$
   (b) $100x^2-36$
   (c) $x^2+25+10x$
   (d) $4(x-1)^2+(x-1)^3$
   (e) $(5-x)(3-x)+(x-3)(5+x)$
   (f) $x^2-4+(x-2)(x+2)$
   (g) $(x+1)(3x+5)-(4x+7)(x+1)$
   (h) $(4x+8)(x+7)+(3x+6)(x-7)$
   (i) $3x^2+9x-12$

Exercice 5 : effectuer les calculs suivants : B - C - E - G - H

A = $\sqrt{7}\times\sqrt{3}$ B = $\sqrt{5}\times\sqrt{20}$ C = $\sqrt{12}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ D = $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{25}}$

E = $\sqrt{5}\times\sqrt{15}\times\sqrt{3}$ F = $\sqrt{2}\times\frac{-10}{\sqrt{32}}$ G = $4\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}\times(-3)$ H = $\sqrt{3}\left(5\sqrt{3}+2\right)-(1-4\sqrt{3})$

Exercice 6 : écrire les nombres suivants sous la forme $3^n\times 2^p$, où n et p sont des entiers relatifs à préciser . a - c - e

a) $(3^2\times 16)^4$ b) $\left(\sqrt{3}\times\sqrt{2}\right)^4$ c) $\frac{27}{64}$ d) $0,75$ e) $\sqrt{3^{10}\times 2^{12}}$

Exercice 7 : en utilisant le paragraphe III.3 , écrire sans dénominateur l'expression $\frac{5}{\sqrt{7}-3}$. à faire

Exercice 8 : questions diverses . 1 - 3 - 4

1. Encadrer par deux entiers naturels consécutifs $\sqrt{83}$.
2. Ecrire sans racine carrée au dénominateur : a) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{10}{\sqrt{5}}-\sqrt{20}$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ d) $\frac{4}{\sqrt{7}-1}$
3. Développer $\left(\sqrt{3}-2\right)^2+5\left(\sqrt{3}+2\right)$.
4. Le nombre $3-2\sqrt{2}$ admet-il une racine carrée ? Et $2\sqrt{2}-3$?

Exercice 9 : x et y sont deux nombres réels . Déterminer $\sqrt{4x^2+y^2-4xy}$. à faire
(*Indication* : on peut s'interroger sur l'existence ... $4x^2+y^2-4xy$ à reconnaître , et utilisation de P4)

Exercice 10 : montrer que pour tout nombre réel x : $x^2+4x+4(4x+8)(x-3)+4=(x+2)(17x-46)$. à faire

Exercice 11 : démonter des égalités . 1 - 2

1. Montrer que pour tout nombre réel non nul x : $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.
2. Montrer que pour tout nombre réel x : $\dfrac{1+e^x}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1+e^{-x}}{e^{-2x}+1}$

Exercice 12 : encadrement (une variable) . a - d - e - f - g - h

x est un nombre réel tel que $2 \leq x \leq 4$.

Donner un encadrement des nombres suivants :

a) $3x-2$ b) $7-5x$ c) x^2 , $\ln(x)$ et e^x d) $f(x)$, avec f strictement décroissante sur $\mathbf{R}$.

e) $-5x^2+10$ f) $\dfrac{1}{x+3}$ g) $\dfrac{1}{x}+3$ h) $x^2+\ln x$.

Exercice 13 : encadrement (deux variables) . a - d - f - h - i .

x et y sont deux nombres réel tels que $2 \leq x \leq 4$ et $3 \leq y \leq 6$.

Donner un encadrement des nombres suivants :

a) $x+2y$ b) $3x-5y$ c) xy d) $\dfrac{x}{y}$ e) x^2+y^2 f) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$ g) $(x+3)(y-2)$ h) $(x+3)-(y-2)$ i) $(x-3)^2$

Exercice 14 : Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes : 3 - 4 - 6 - 7 - 9

1. $x^2-11=0$
2. $x^2+2=4x^2-10$
3. $200x^2+600x-100=0$
4. $5\left(x-\dfrac{1}{3}\right)(3x-5)=0$
5. $4x^2+1=4x$
6. $x^2+5x=(x+1)(2x-5)$
7. $(x-1)^4=(x-1)^2$
8. $x^2-4x=-4+(x-2)(3x+7)$
9. $4(3x-6)(2x-3)=(x-2)(4x-1)$
10. $(3x+2)^3=(3x+2)$.

Exercice 15 : résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes : 1 - 2

1. $\dfrac{3x^2-3}{x-1}=0$
2. $\dfrac{x+4}{x+1}=\dfrac{x+5}{x}$
3. $\dfrac{5x-1}{x+2}+3=\dfrac{x}{x+2}-1$

Exercice 16 : résoudre dans $\mathbf{R}$ les inéquations suivantes : 1 - 4 - 5

1. $(3x+5)(x-7) \leq 0$
2. $4x^2+x-1 \geq 0$
3. $\dfrac{x+2}{x-5}>0$
4. $(2x-4)^2 \leq (x+3)^2$
5. $5x^2+2>3x^2+1$.

Exercice 17 : démontrer des inégalités : a - b - c

1. Montrer que pour tout nombre réel x : $0 \leq \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$. (*Indication* : il y a deux inégalités à établir ici)
2. Montrer que pour tout nombre réel x : $x^2+7x+3 \geq x-6$. (*Indication* : non , pas besoin)
3. Montrer que pour tout nombre réel x : $e^x \geq x+1$. (*Indication* : on passe par l'étude d'une fonction pour déterminer son signe ... quelle fonction va-t-on poser ?)

Exercice 18 : résoudre les équations suivantes (discussion suivant la valeur du paramètre m) . pour plus tard ...

(a) $m^2x+2m=9x-6$ (b) $(m-1)x^2-4(m-2)x+4m-11=0$ (c) $mx^2+(1-m)x-1=0$

VI.2 Correction des exercices de base

Exercice 1 :

$A = \frac{1}{2} + 5 - \left(4 + \frac{-1}{4}\right) = \frac{2}{4} + \frac{20}{4} - \left(\frac{16}{4} + \frac{-1}{4}\right) = \frac{7}{4}$

$D = \frac{\frac{-3}{2} + \frac{4}{7}}{\frac{-1}{3} + \frac{7}{6}} = \frac{\frac{-21}{14} + \frac{8}{14}}{\frac{-2}{6} + \frac{7}{6}} = \frac{\frac{-13}{14}}{\frac{5}{6}} = \frac{-13 \times 6}{14 \times 5} == -\frac{13 \times 3 \times 2}{7 \times 2 \times 5} = -\frac{39}{35}$

$I = \frac{-2}{-5} \times 3 + 4 \times \frac{9}{10} = \frac{6}{5} + \frac{18}{5} = \frac{24}{5}$

Exercice 2 :

$D = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3} = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3}$

$E = \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{1 \times (1+x)}{(1-x)(1+x)} + \frac{1 \times (1-x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{1 + (1+x) + (1-x)}{1-x^2} = \frac{3}{1-x^2}$

Exercice 3 :
$D = (ab)^3 \times a^2 = a^3 b^3 \times a^2 = a^5 b^3$.

$H = 8 \times (3 \times 4)^7 \times 2^4 \times 9^5 = 2^3 \times (3 \times 2^2)^7 \times 2^4 \times (3^2)^5 = 2^3 \times 3^7 \times 2^{14} \times 2^4 \times 3^{10} = 2^{21} \times 3^{17}$

$L = (-1)^7 + (-1)^{10} + (-1)^3 - (-1)^6 = -1 + 1 + (-1) - (1) = -2$

Exercice 4 :

1. Développer :
   (c) $(x + x^2 + 1)(x + x^2) = x^2 + x^3 + x^3 + x^4 + x + x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$
   (e) $a(ab + b^2) - b(ab + a) = a^2 b + ab^2 - ab^2 - ab = a^2 b - ab$
   (g) $3(a-4)(a+4) - 24(a-2) = 3(a^2 - 4^2) - 24a + 48 = 3a^2 - 24a$
2. Factoriser :
   (c) $x^2 + 25 + 10x = (x+5)^2$

   (f) $x^2 - 4 + (x-2)(x+2) = (x+2)(x-2) + (x-2)(x+2) = 2(x+2)(x-2)$

   (h) $(4x+8)(x+7) + (3x+6)(x-7) = 4(x+2)(x+7) + 3(x+2)(x-7) = (x+2)[4(x+7) + 3(x-7)]$
   $= (x+2)(7x+7) = 7(x+2)(x+1)$

   (i) $3x^2 + 9x - 12 = 3(x^2 + 3x - 4) = \cdots = 3(x-1)(x+4)$

Exercice 5 : effectuer les calculs suivants :
C = $\sqrt{12} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$

G = $4\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} \times (-3) = -3 \times 4 \times 2 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 = -120$

H = $\sqrt{3}\left(5\sqrt{3} + 2\right) - (1 - 4\sqrt{3}) = 5\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3} - 1 + 4\sqrt{3} = 14 + 6\sqrt{3}$

Exercice 6 : écrire les nombres suivants sous la forme $3^n \times 2^p$.
(a) $(3^2 \times 16)^4 = (3^2 \times 2^4)^4 = 3^8 \times 2^{16}$

(e) $\sqrt{3^{10} \times 2^{12}} = \sqrt{3^{10}} \times \sqrt{2^{12}} = 3^5 \times 2^6$

Exercice 7 : $\frac{5}{\sqrt{7} - 3} = \frac{5 \times (\sqrt{7} + 3)}{(\sqrt{7} - 3) \times (\sqrt{7} + 3)} = \frac{5 \times (\sqrt{7} + 3)}{(\sqrt{7})^2 - 3^2} = \frac{5 \times (\sqrt{7} + 3)}{-2}$.

Exercice 8 : questions diverses .
1. Encadrer par deux entiers naturels consécutifs $\sqrt{83}$: on encadre 83 par deux carrés : $81 \leq 83 \leq 100$ donc $\sqrt{81} \leq \sqrt{83} \leq \sqrt{100}$.
On conclut $9 \leq \sqrt{83} \leq 10$.
4. Le nombre $3 - 2\sqrt{2}$ admet-il une racine carrée ? **Réponse** : oui , puisque ce nombre est positif, on rappelle que (val. approchée à connaître) , $\sqrt{2} \simeq 1.41$.
Pour aller un peu plus loin , on peut chercher cette racine ... On obtient comme résultat $\sqrt{2} - 1$: ce nombre est positif et son carré est égal à :

$\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{2} + 1^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, soit le résultat attendu : $\boxed{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1}$.

Et $2\sqrt{2}-3$? **Réponse** : non . Ce nombre est négatif , on rappelle que (val. approchée à connaître) , $\sqrt{2} \simeq 1.41$

<u>Exercice 9</u> : x et y sont deux nombres réels . Déterminer $\sqrt{4x^2+y^2-4xy}$.
(*Indication* : on peut s'interroger sur l'existence ... $4x^2+y^2-4xy$ à reconnaître , et utilisation de P4)
On utilise l'indication : $4x^2+y^2-4xy=(2x-y)^2$. Ce nombre est positif (c'est un carré) , il admet donc un racine carrée . $\sqrt{(2x-y)^2}=|2x-y|$ d'après P4 .
On conclut $\sqrt{4x^2+y^2-4xy}=|2x-y|$.

<u>Exercice 10</u> : montrer que pour tout nombre réel x : $x^2+4x+4(4x+8)(x-3)+4=(x+2)(17x-46)$.

$\boxed{\text{M1}}$: on développe les deux expressions (séparément) , on obtient la même expression (calculs à faire !) et on peut conclure .

$\boxed{\text{M2}}$: on remarque que l'expression de droite est factorisée . On essaye alors de factoriser l'expression de gauche : facteur $(4x+8)=4(x+2)$, c'est très bien . Et $x^2+4x+4=(x+2)^2$, c'est très bien aussi . On conclut que le membre de gauche est égal à :
$(x+2)[(x+2)+4\times 4(x-3)]=(x+2)[17x-46]$, soit le résultat attendu .

<u>Exercice 11</u> : démonter des égalités .

(a) Montrer que pour tout nombre réel non nul x : $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.

On travaille sur l'expression de gauche : soit $x \in \mathbf{R}$.
$\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\times\dfrac{e^x}{e^x}=\dfrac{(e^x+e^{-x})\times e^x}{(e^x-e^{-x})\times e^x}=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ avec $e^x\times e^x=e^{2x}$ et $e^{-x}\times e^x=e^{-x+x}=e^0=1$.

L'égalité est démontrée .

<u>Exercice 12</u> : encadrement (<u>une variable</u>) .

x est un nombre réel tel que $2\leq x\leq 4$. Donner un encadrement des nombres suivants :

e)$-5x^2+10$.

$2\leq x\leq 4$ donc (croissance de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$) $4\leq x^2\leq 16$.
On multiplie par (-5) (attention , sens) : $-5\times 16\leq -5\times x^2\leq -5\times 4$ et on ajoute 10 à chaque membre . (P5)
On obtient : $\boxed{-70\leq -5x^2+10\leq -10}$.
h) $x^2+\ln x$.

Les fonctions carré et ln sont strictement croissantes sur $\mathbf{R}_+^*$: on a donc $2^2\leq x^2\leq 4^2$ et $\ln 2\leq \ln x\leq \ln 4$.
On additionne ensuite membre à membre les deux inégalités . (P6)
On obtient : $\boxed{4+\ln 2\leq x^2+\ln x\leq 16+\ln 4}$.

<u>Exercice 13</u> : encadrement (<u>deux variables</u>) .

x et y sont deux nombres réel tels que $2\leq x\leq 4$ et $3\leq y\leq 6$. Donner un encadrement des nombres suivants :

(d) $\dfrac{x}{y}=x\times\dfrac{1}{y}$, **pas de division membre à membre** .

On utilise la stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbf{R}_+^*$: $\dfrac{1}{6}\leq\dfrac{1}{y}\leq\dfrac{1}{3}$.

On multiplie membre à membre , on travaille avec des **nombres positifs** : $2\times\dfrac{1}{6}\leq x\times\dfrac{1}{y}\leq 4\times\dfrac{1}{3}$. (P6)

On obtient : $\boxed{\dfrac{1}{3}\leq\dfrac{x}{y}\leq\dfrac{4}{3}}$.

(h) $(x+3)-(y-2)$.

On travaille sur chaque membre et on obtient : $5\leq x+3\leq 7$ et $1\leq y-2\leq 4$.
Pas de soustraction membre à membre : $(x+3)-(y-2)=(x+3)+(-1)\times(y-2)$. On encadre donc $(-1)\times(y-2)$: $-4\leq(-1)\times(y-2)\leq -1$. On additionne membre à membre : $5+(-4)\leq(x+3)+(-1)\times(y-2)\leq 7+(-1)$.
On obtient : $\boxed{1\leq(x+3)-(y-2)\leq 6}$.

(i) $(x-3)^2$.

L'encadrement de $(x-3)$ donne $-1\leq x-3\leq 1$.
Attention , on ne pas élever « directement » au carré , le sens de variation de $t\rightarrow t^2$ change sur l'intervalle $[-1,1]$. Mais on connaît le minimum et le maximum de la fonction carré sur cet intervalle .
On obtient : $\boxed{0\leq(x-3)^2\leq 1}$.

Exercice 14 : Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes :
3. $200x^2+600x-100=0 \Leftrightarrow 2x^2+6x-1=0$. Equation classique du second degré .

5. $4x^2+1=4x \Leftrightarrow 4x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow (2x-1)^2=0$: la factorisation permet de conclure directement que $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{2}\right\}}$.

7. $(x-1)^4=(x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^4-(x-1)^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2[(x-1)^2-1]=0 \Leftrightarrow (x-1)^2[x^2-2x]=0 \Leftrightarrow (x-1)^2x(x-2)=0$.
$\boxed{\mathscr{S}=\{0;1;2\}}$

9. $4(3x-6)(2x-3)=(x-2)(4x-1)$: on peut (certes) développer , regrouper , obtenir une équation du second degré et calcul de Δ , etc ...ou , une fois encore , remarquer que $(3x-6)=3(x-2)$. Facteur commun ! !
$4(3x-6)(2x-3)=(x-2)(4x-1) \Leftrightarrow 4\times 3\times(x-2)(2x-3)-(x-2)(4x-1)=0 \Leftrightarrow (x-2)[12(2x-3)-(4x-1)]=0$. Et on termine (produit nul)

Exercice 15 : résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes :
1. $\dfrac{3x^2-3}{x-1}=0$: on utilise V.1.3 .
(i) Il y a une contrainte sur l'existence du quotient , à savoir $x-1\neq 0$.
La valeur $x=1$ est exclue du domaine $\mathscr{D}$ de résolution : $\boxed{\mathscr{D}=\mathbf{R}\setminus\{1\}}$.
(ii) On résout l'équation sur $\mathscr{D}$, c'est à dire $x\neq 1$.
Sur $\mathscr{D}$, $\dfrac{3x^2-3}{x-1}=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0$ (nullité du quotient , rappel paragraphe V.1.3) .
$3x^2-3=0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1)=0$: les solutions de cette équation sont 1 et -1 , mais $1\notin\mathscr{D}$.
(iii) L'équation de départ admet donc une unique solution -1 : $\boxed{\mathscr{S}=\{-1\}}$.

2. $\dfrac{x+4}{x+1}=\dfrac{x+5}{x}$. on utilise V.1.3 .
(i) Il y a une contrainte sur l'existence des deux quotients, à savoir $x+1\neq 0$ et $x\neq 0$. $\boxed{\mathscr{D}=\mathbf{R}\setminus\{-1;0\}}$.
(ii) On résout l'équation sur $\mathscr{D}$.
$\dfrac{x+4}{x+1}=\dfrac{x+5}{x} \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{x+1}-\dfrac{x+5}{x}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x+4)-(x+1)(x+5)}{x(x+1)}=0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x-5}{x(x+1)}=0$.
Sur $\mathscr{D}$, $\dfrac{-2x-5}{x(x+1)}=0 \Leftrightarrow -2x-5=0$, soit $x=-\dfrac{5}{2}$ avec $-\dfrac{5}{2}\in\mathscr{D}$.
(iii) L'équation de départ admet une unique solution qui est : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\frac{5}{2}\right\}}$.

Exercice 16 : résoudre dans $\mathbf{R}$ les inéquations suivantes :
4. $(2x-4)^2\leq(x+3)^2$: on peut développer , regrouper et résoudre une inéquation de la forme $ax^2+bx+c\leq 0$. Mais il est préférable ici d'utiliser la factorisation de A^2-B^2 .
$(2x-4)^2\leq(x+3)^2 \Leftrightarrow (2x-4)^2-(x+3)^2\leq 0 \Leftrightarrow ((2x-4)+(x+3))((2x-4)-(x+3))\leq 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x-7)\leq 0$.
On a directement les racines $x_1=\dfrac{1}{3}$ et $x_2=7$ (forme factorisée) du trinôme , avec $a=3$: on rappelle que (P10) le trinôme est du signe de $-a$ (donc ici négatif) entre les racines .
On conclut que $\boxed{\mathscr{S}=\left[\frac{1}{3},7\right]}$.

5. $5x^2+2>3x^2+1$. Même travail . $5x^2+2>3x^2+1 \Leftrightarrow 2x^2+1>0$. STOP ! ! Cette inégalité est vraie pour toute valeur de x , puisque pour tout x réel on a $x^2\geq 0$.
On conclut que $\boxed{\mathscr{S}=\mathbf{R}}$.

Exercice 17 : démontrer des inégalités .
(a) Montrer que pour tout nombre réel x : $0\leq\dfrac{1}{x^2+1}\leq 1$.
(i) Pour tout nombre réel x , $1+x^2\geq 1>0$ (cela assure l'existence du quotient pour tout nombre réel x) , donc $\dfrac{1}{x^2+1}\geq 0$. (quotient de nombres positifs)
(ii) $\boxed{\text{M1}}$: Pour tout nombre réel x , $1+x^2\geq 1$, donc $\dfrac{1}{x^2+1}\leq 1$. (décroissance stricte de la fonction inverse sur $\mathbf{R}_+^*$) .

$\boxed{\text{M2}}$ Variante pour (ii) : soit $x\in\mathbf{R}$. $\dfrac{1}{x^2+1}-1=\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{x^2+1}{x^2+1}=\dfrac{-x^2}{x^2+1}$ et $\dfrac{-x^2}{x^2+1}\leq 0$. (signe d'un quotient)
Donc pour tout nombre réel x : $\dfrac{1}{x^2+1}\leq 1$.
(iii) On a montré que pour tout nombre réel x : $0\leq\dfrac{1}{x^2+1}\leq 1$.

VII Exercices à rendre

EXERCICE A : Vrai ou Faux ? indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse , on justifiera les réponses (propriété de cours , raisonnement , contre exemple etc) .

1. Pour tout nombre réel x , $x^2 \geq x$.
2. Pour tout nombre réel x , $x^2 \leq x$.
3. Si $x < 2$, alors $x^2 < 4$.
4. Quels que soient les nombres a et b , $a^2 \geq 2ab - b^2$.
5. Quels que soient les nombres a et b , $a \times b \geq a + b$.
6. Quels que soient les nombres a et b , $a - b \leq a + b$.
7. Il existe un nombre réel x tel que $\sqrt{x^2} = -x$.
8. Il existe un nombre supérieur à son double .
9. Tout nombre entier est inférieur à son triple .
10. Pour tout nombre entier naturel k , l'équation $e^x = k$ admet une unique solution .
11. Pour tout nombre réel x , $e^x > 0,001$.
12. Pour tout nombre réel x , $e^x > e^{-x}$.
13. Si a et b sont tels que $a > b$, alors $e^a > e^b$.
14. La fonction ln est définie sur $\mathbf{R}$.
15. La fonction exponentielle est définie sur $\mathbf{R}$.
16. Quel que soit le nombre réel a , $\ln a^2 = 2\ln a$.
17. $\ln(\pi) + \ln\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$.
18. La fonction $f : x \to \cos(x)\sin(x)$ définie sur $\mathbf{R}$ est paire .
19. La fonction $f : x \to \cos(x)\sin(x)$ définie sur $\mathbf{R}$ est π-périodique .
20. L'équation $\cos(x) = \sin(x)$ n'a pas de solution dans $\mathbf{R}$.
21. L'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ n'a qu'une seule solution dans $\mathbf{R}$.
22. (Bonus) Ln et exponentielle sont sur un radeau . Ln s'affole tout d'un coup et s'écrit « On dérive , on dérive ! ! ». Exponentielle répond « je m'en fiche » . Pourquoi ?

EXERCICE B : une étude de suite .
On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout n entier naturel non nul , $u_{n+1} = 3u_n + 2n - 3$.

1. Monter que $u_2 = 2$ et calculer u_3 .
2. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq n$.
(*Si ce type de raisonnement vous est inconnu , vous pouvez admettre le résultat et vous en servir dans la suite de l'exercice*)
3. Déduire la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Soit $n \geq 1$. Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
5. On souhaite , dans cette question , déterminer l'expression du terme général u_n de cette suite en fonction de n . On utilise pour cela une suite auxiliaire (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $v_n = u_n + n - 1$.
   (a) Montrer que cette suite est géométrique : on précisera sa raison et son premier terme .
   (b) Calculer v_1 . Déterminer pour tout entier $n \geq 1$ l'expression de v_n en fonction de n .
   (c) En déduire pour tout entier $n \geq 1$ l'expression de u_n en fonction de n .

EXERCICE C : soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^{3x} - 3e^x$.

1. Résolvez l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Déterminez le sens de variation de f.
4. Donnez l'allure de la courbe représentative de f.

EXERCICE D : équations et inéquations , fonctions usuelles .

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation $e^{x^2-5x} \geq e^{3x}$.
2. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 6 = 0$
3. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $|3x+5| = |x-3|$.
4. On considère l'équation $\ln(3x+6) = \ln(x-3)$.
   (a) Sur quel domaine va-t-on résoudre cette équation ?
   (b) Terminer la résolution de l'équation .

EXERCICE E : on considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :
$$f(x) = \ln(x^2+x+1)$$
On note C_f sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Expliquer pourquoi la fonction f est bien définie sur $\mathbf{R}$.
2. Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)$. Calculer alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ln(3) - 2\ln(2)$.
4. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $\mathbf{R}$.
   (b) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbf{R}$: indiquer les éléments obtenus aux questions 2 et 3.
5. (a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbf{R}$.
   (b) Déterminer des équations des tangentes à C_f aux points d'abscisses 0 et -1.
6. (a) Calculer la dérivée seconde de f .
   (b) Étudier la convexité de f sur $\mathbf{R}$.
7. Pour tout x réel , comparer $f\left(-\dfrac{1}{2} - x\right)$ et $f\left(-\dfrac{1}{2} + x\right)$.