

**34<sup>ème</sup> congrès MATH JEANS en**

**34**

**DU 27 MARS AU 2 JUIN 2023**

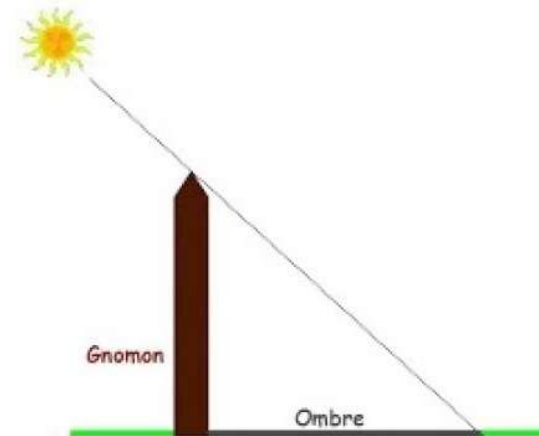
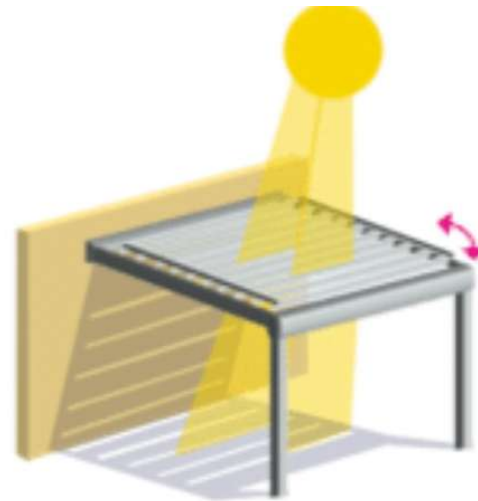
**Des jeunes viennent présenter leurs recherches de l'année !**

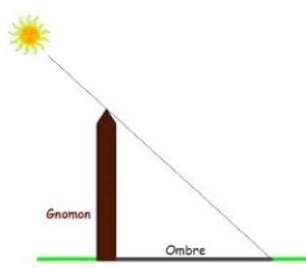
**un forum des conférences des exposés**

GIF-SUR-YVETTE - GRENOBLE - MULHOUSE - NEW-YORK  
NICE - ORLÉANS - PAU - POTSDAM - TOULOUSE - VALENCIENNES

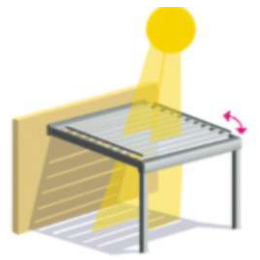
# Gnomon & pergola bio-climatique

## Collège Cousteau de Rognac





# Gnomon et pergola bio-climatique



*Atelier MATH.en.JEANS 2022-23 - Clg Cousteau de Rognac*

Présents au congrès

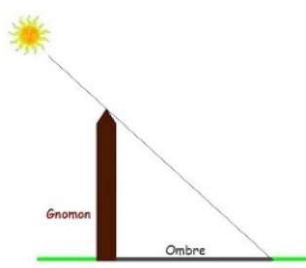
DUCHENE Clodilde  
GARRIGUES Clémence  
IMBERT-LEFEBVRE Sasha

RAMPEL Laura  
RUGANILily  
ZERROUKI Naïs

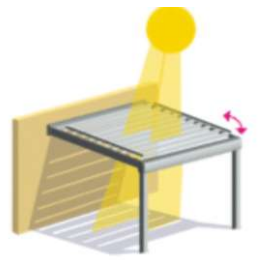
Autre membre  
TACHEN Alexis

Professeur responsable du club : M. Beddou Laurent  
Chercheur : M. Cassaigne Julien

*Atelier MATH.en.JEANS 2022-23 Clg Cousteau de Rognac*

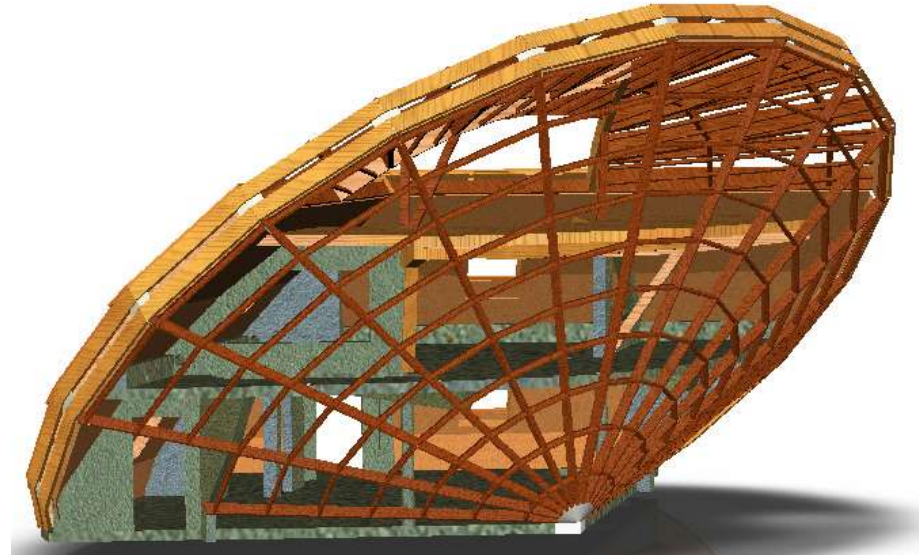
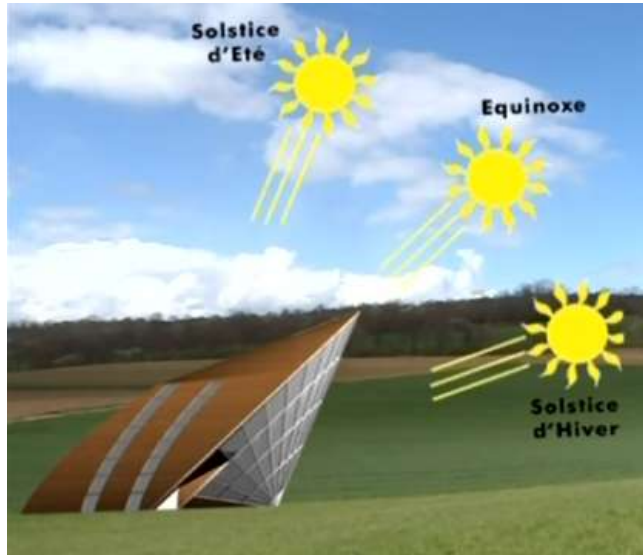


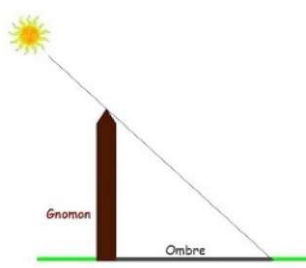
# Gnomon et pergola bio-climatique



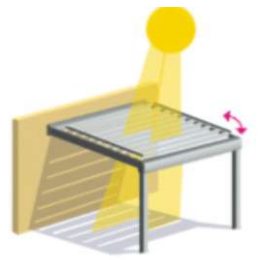
## *Idée initiale du projet*

Étudier la trajectoire de l'ombre d'un bâton (gnomon) et comprendre les principes d'une maison bio-climatique, sur le modèle de l'héliodome imaginé et construit par Éric Wasser.





# Gnomon et pergola bio-climatique

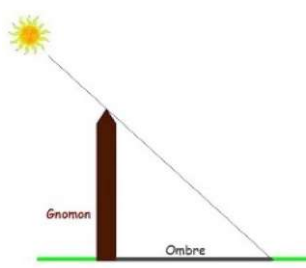


*L'Héliodome originel à Cosswiller, en Alsace*

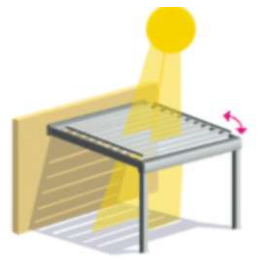
[www.bubblemania.fr/eric-wasser-heliodome-maison-solaire](http://www.bubblemania.fr/eric-wasser-heliodome-maison-solaire)



Atelier MATH.en.JEANS 2022-23 Clg Cousteau de Rognac



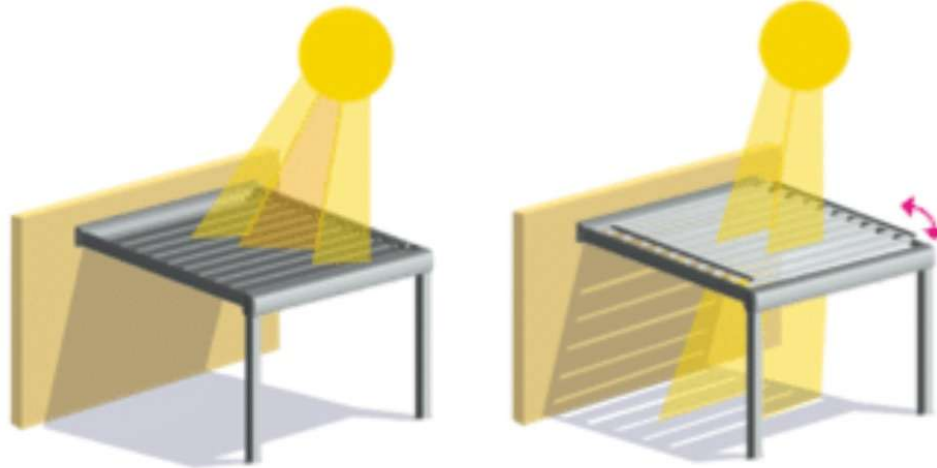
# Gnomon et pergola bio-climatique

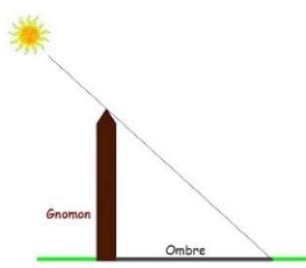


## *Nouveau projet*

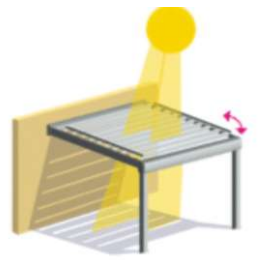
Malgré nos demandes, nous n'avons pas pu prendre contact avec le concepteur et le sujet de la maison-bioclimatique était trop vaste et difficile.

Nous avons alors modifié l'énoncé initial en gardant son esprit, avec cette fois l'étude d'une pergola bio-climatique : comment la concevoir pour avoir le maximum de lumière en hiver et le minimum en été ?





# Gnomon et pergola bio-climatique

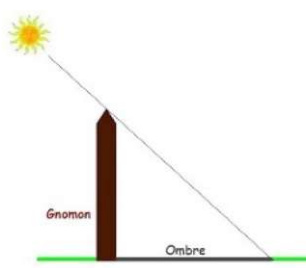


## 1ère partie - Modélisation de la pergola

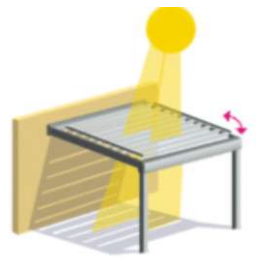
Il s'agissait donc de modéliser mathématiquement une pergola et d'optimiser les différents paramètres de sa conception :

nombre ( $n$ ), largeur ( $H$ ), écartement ( $L$ ) et inclinaison ( $\delta$ ) des lames ainsi que la hauteur ( $X + 200$ ) de leur positionnement.



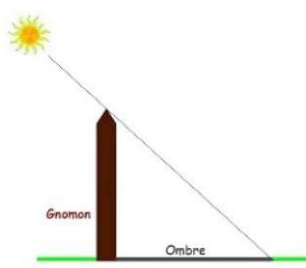


# Gnomon et pergola bio-climatique

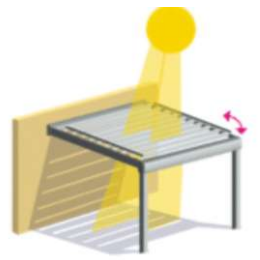


## 1ère partie : notre maquette





# Gnomon et pergola bio-climatique

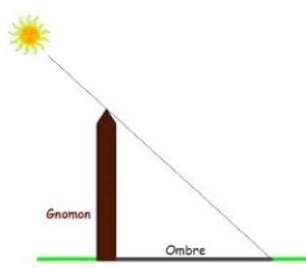


## 1ère partie - Modélisation : hypothèses de simplification

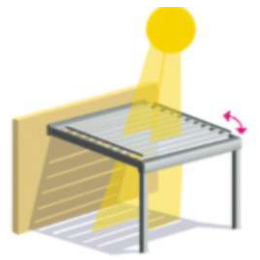
- 1- La pergola est supposée positionnée plein sud
- 2- La pergola est supposée assez large pour éviter l'entrée des rayons par les côtés
- 3- On néglige la variation d'intensité des rayons du soleil dans la journée et dans l'année qui provient de l'angle d'entrée dans l'atmosphère.  
Cela se justifie par le fait que l'on n'effectue pas une étude énergétique, mais d'ensoleillement en relatif, avec ou sans pergola, au même endroit/même moment (\*).
- 4- Avec le même argument (\*), on considérera, pour simplifier, que le soleil est toujours perpendiculaire à la fenêtre (il ne fait que monter ou descendre, avec un azimut fixe) !  
Autre argument, si le soleil est supposé à l'infini, on peut considérer qu'il se déplace dans un plan parallèle à la pergola/fenêtre. Un petit raisonnement démontre alors que chaque point de la fenêtre éclairée le reste mais avec une baisse d'intensité lumineuse (voir diapo suivante).



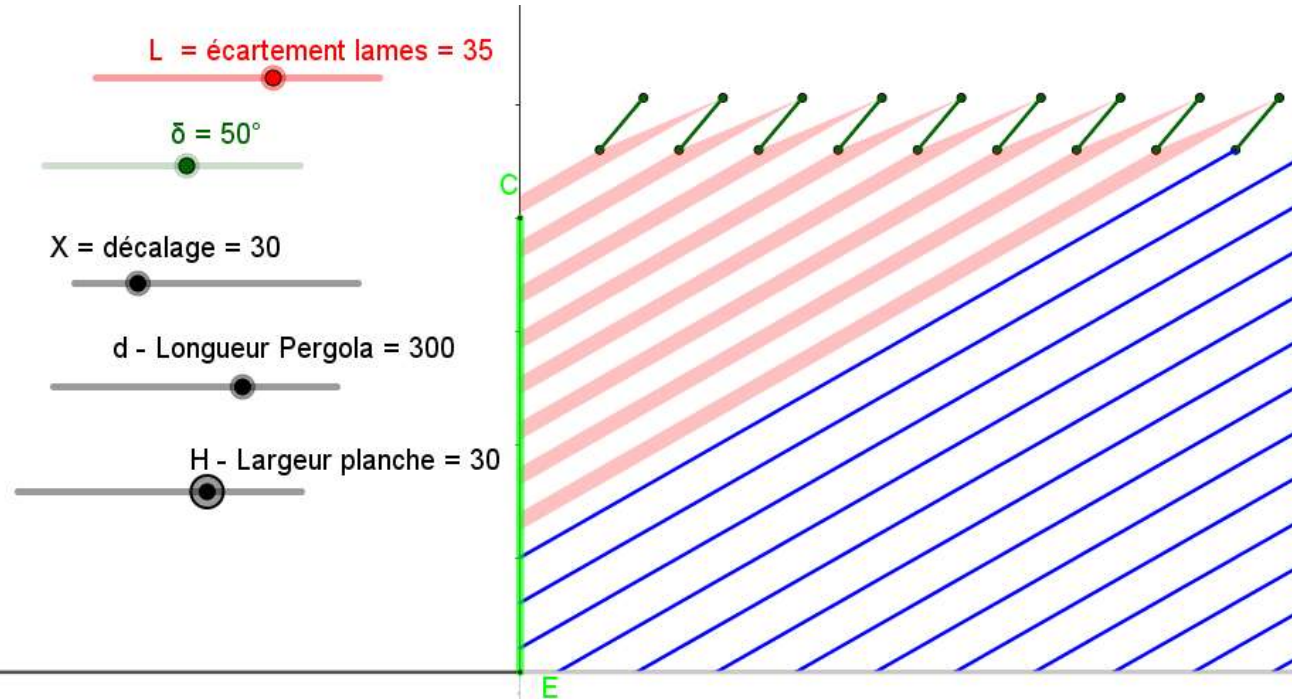




# Gnomon et pergola bio-climatique



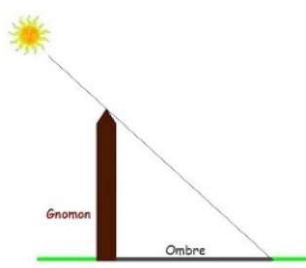
## 1ère partie - Modélisation de la pergola sur géogébra



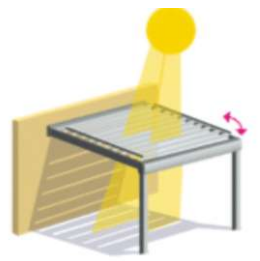
On limitera l'étude à la lumière entrant dans la porte-fenêtre (en vert).  
On négligera les effets de réverbération du sol.

2 cas :

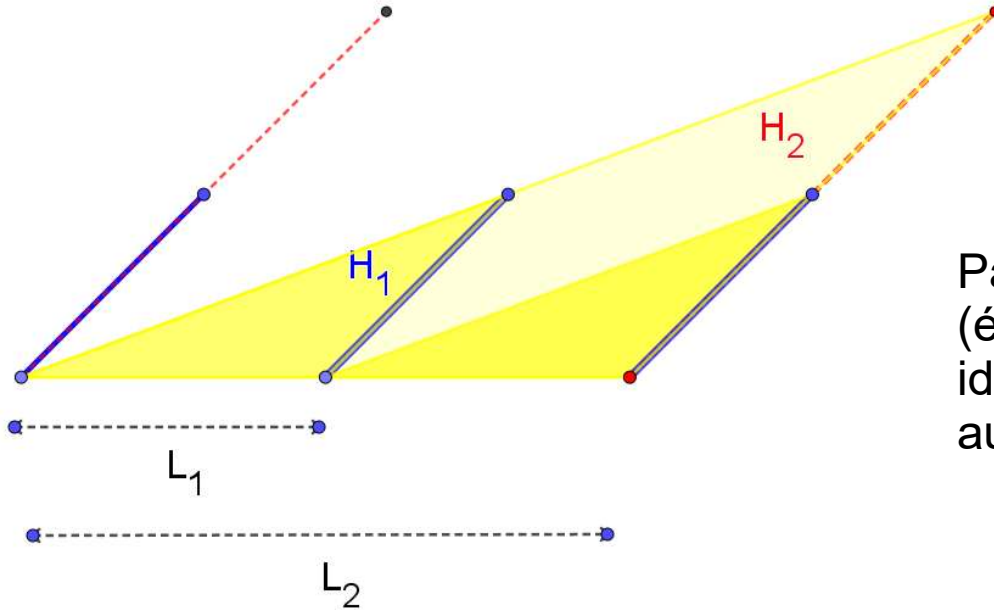
- lumière par le haut (rouge)
- lumière par le bas (bleu)



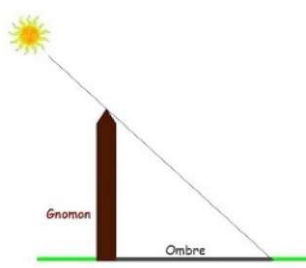
# Gnomon et pergola bio-climatique



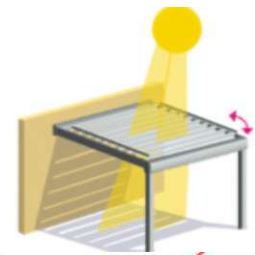
## 1ère partie - Modélisation de la pergola sur géogébra



Par le théorème de Thalès, si le rapport  $H/L$  (écartement/largeur entre lames) est identique, pour une inclinaison donnée, on aura la même quantité de lumière entrante.



# Gnomon et pergola bio-climatique



## Quantité de lumière Haut

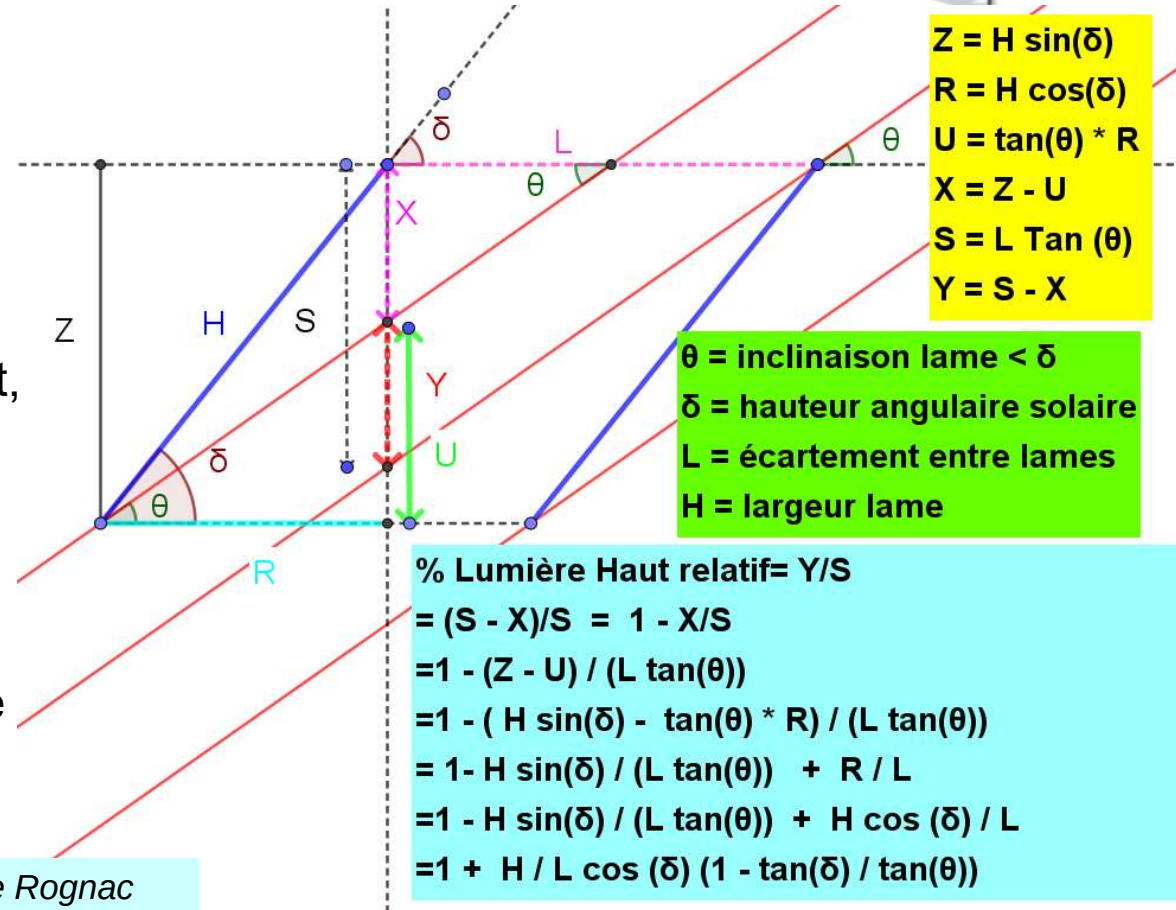
### Cas $\theta < \delta$

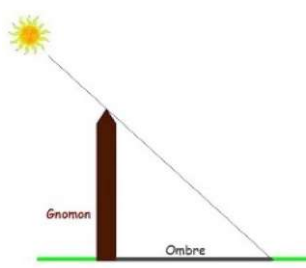
inclinaison lame < hauteur angulaire solaire

La partie de la fenêtre éclairée par le haut, contient une proportion de luminosité de :

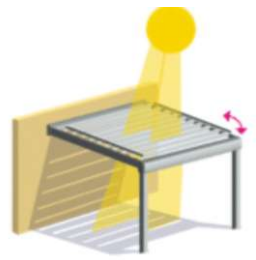
$$1 + H / L \cos(\delta) (1 - \tan(\delta) / \tan(\theta))$$

Attention, il faudra ensuite ramener cette quantité en proportion de la surface totale de la fenêtre !





# Gnomon et pergola bio-climatique

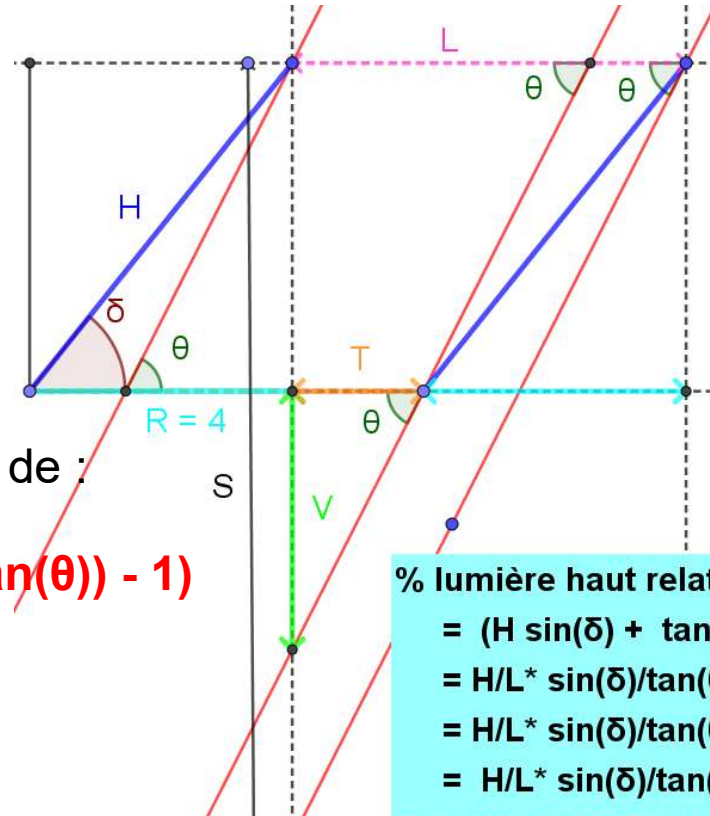


Quantité de lumière  
Haut

Cas  $\theta < \delta$

La partie de la fenêtre éclairée par le haut, contient une proportion de luminosité de :

$$1 + H / L \cos(\delta) (\tan(\delta) / \tan(\theta)) - 1$$



$\theta$  = inclinaison lame  $> \delta$   
 $\delta$  = hauteur angulaire solaire  
 L = écartement entre lames  
 H = largeur lame

$$Z = H \sin(\delta)$$

$$S = L \tan(\theta)$$

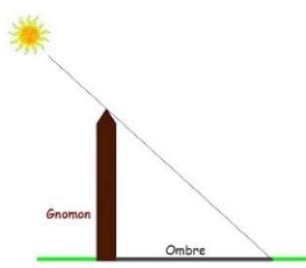
$$R = H \cos(\delta)$$

$$T = L - R$$

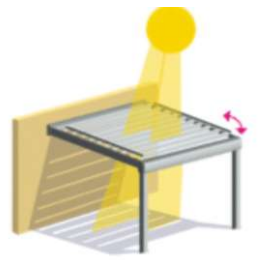
$$V = \tan(\theta) * T$$

$$Y = Z + V$$

$$\begin{aligned} \% \text{ lumière haut relatif} &= Y / S = (Z + V) / S \\ &= (H \sin(\delta) + \tan(\theta) * T) / (L \tan(\theta)) \\ &= H/L * \sin(\delta)/\tan(\theta) + T/L \\ &= H/L * \sin(\delta)/\tan(\theta) + (L - R)/L = H/L * \sin(\delta)/\tan(\theta) + 1 - R/L \\ &= H/L * \sin(\delta)/\tan(\theta) + 1 - H \cos(\delta)/L \\ &= 1 + H/L * \cos(\delta) (\tan(\delta)/\tan(\theta)) - 1 \end{aligned}$$



# Gnomon et pergola bio-climatique

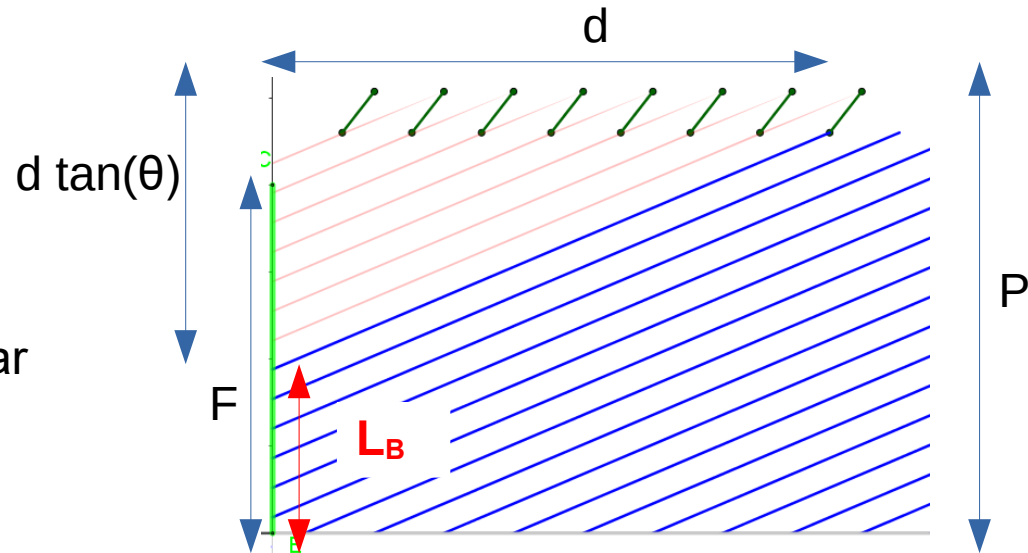


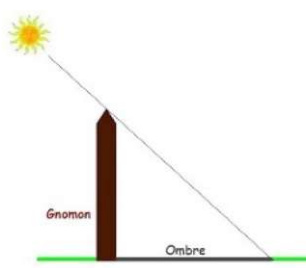
## Quantité de lumière Bas

$\theta$  = hauteur angulaire solaire  
 $P$  = hauteur perdola =  $200 + X$   
 $F$  = hauteur porte-fenêtre = 200

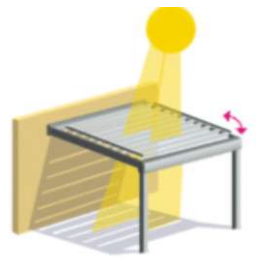
La proportion de la fenêtre éclairée par le bas :

$$L_B = \frac{P - d \tan(\theta)}{F}$$





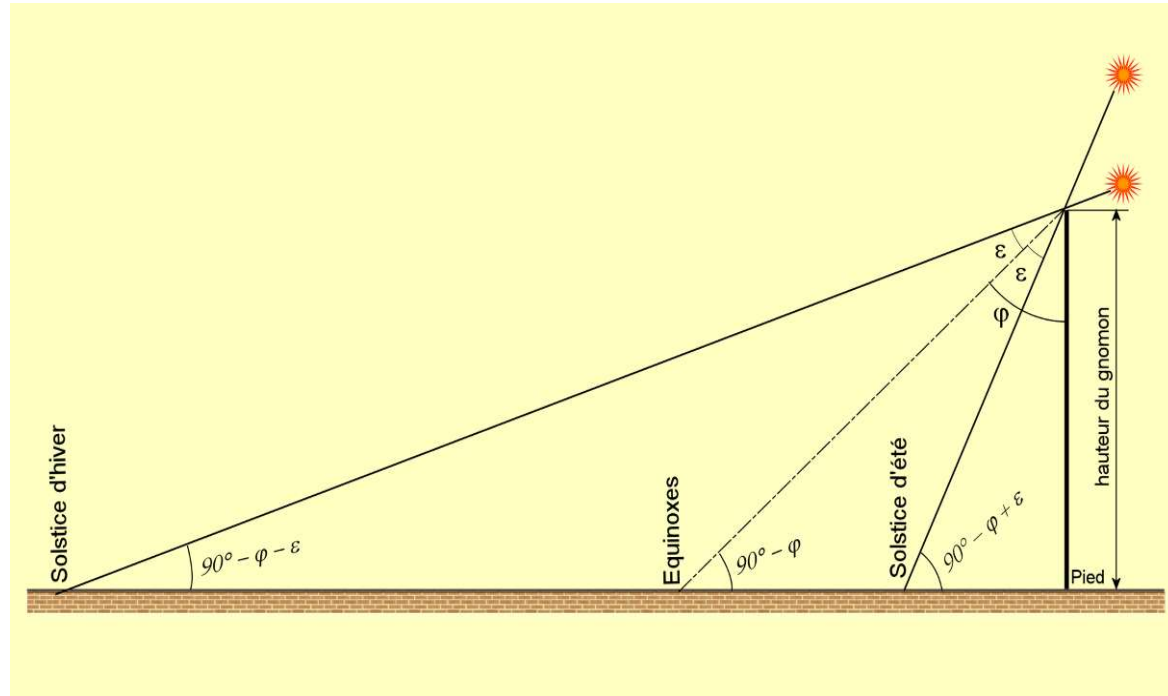
# Gnomon et pergola bio-climatique

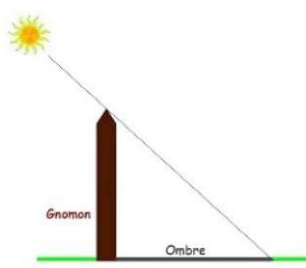


## 2ème partie – Gnomon

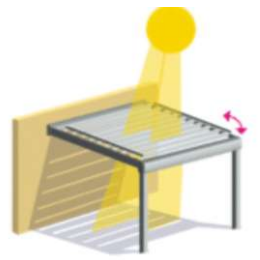
Un gnomon est un simple objet (bâton) planté dans le sol, de hauteur connue (H). S'il est placé verticalement, il permet alors de calculer facilement la hauteur angulaire  $\theta$  du soleil déterminée par la longueur de son ombre (L):  $\theta = \arctan (L/H)$

Sous certaines conditions d'utilisation (inclinaison de son axe et divers correctifs liés à sa position et à l'équation du temps), il permet aussi de donner l'heure.





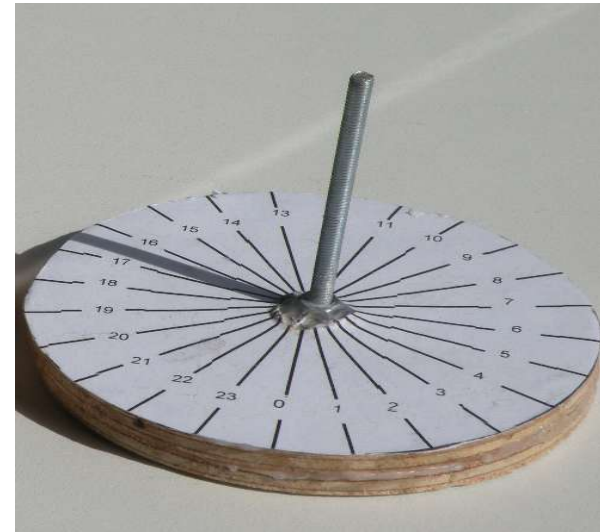
# Gnomon et pergola bio-climatique



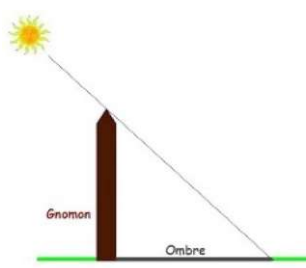
## 2ème partie - Gnomon

Nous avons étudié la modification de la longueur et l'inclinaison de l'ombre à l'aide d'un gnomon.

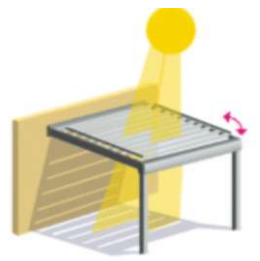
- Relevé de la trajectoire du sommet de l'ombre d'un bâton sur une journée et suivi de son évolution au fil des jours.
- Observation des types de formes de tracé.
- Dédution des tracés de la position du point culminant du soleil dans le ciel (« zénith »), correspondant approximativement au midi solaire.
- Problème d'envoi à l'infini de la courbe lors du levé et du couché du soleil sur l'horizon







# Gnomon et pergola bio-climatique

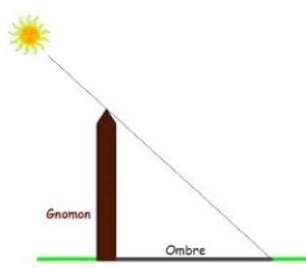


## 2ème partie - Gnomon

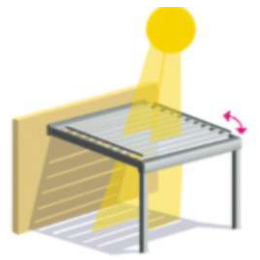
Relevé du mouvement de l'ombre de l'extrémité d'un bâton d'allumette de 3,7 cm de hauteur. Le nord est repéré à l'aide d'une boussole

Au alentour du solstice d'hiver (nuit la plus longue), la courbe est proche d'une hyperbole, ici tracée en surimpression avec Géogébra.





# Gnomon et pergola bio-climatique



## 2ème partie - Gnomon

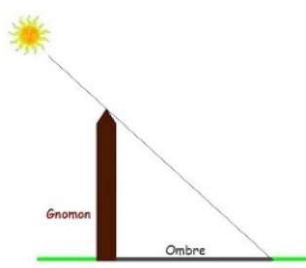
Au alentour de l'équinoxe du printemps (durée jour = durée nuit), la courbe est très aplatie, proche d'une droite, ici tracée en surimpression.

Par symétrie nous, anticipons une forme proche de l'hyperbole inversée en été et d'une droite à l'équinoxe d'automne.

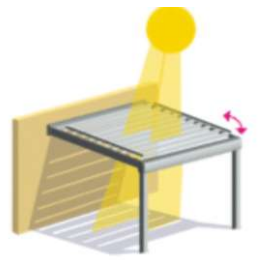
Entre ces 4 dates spéciales, il y a donc des courbes intermédiaires, qui se déforment progressivement.



Relevé de mesures du 31 mars 2023



# Gnomon et pergola bio-climatique

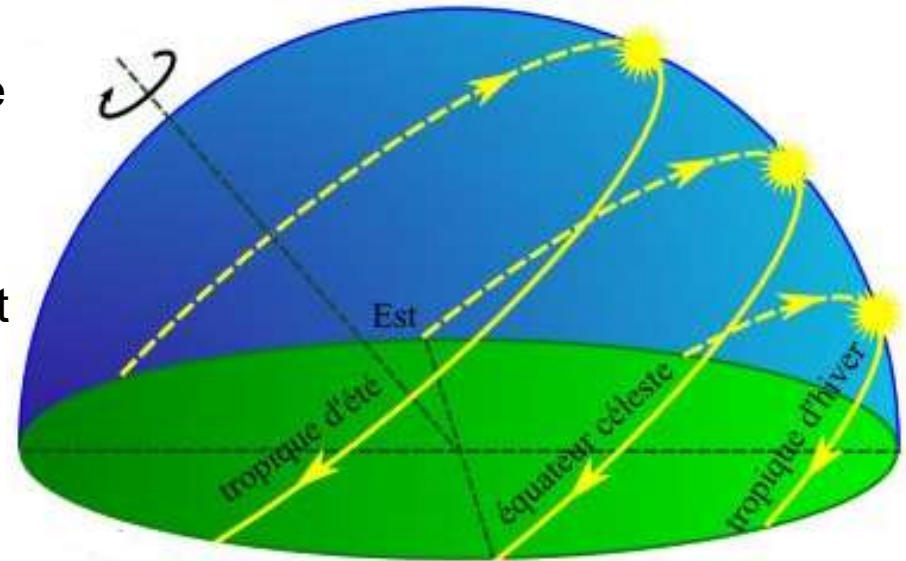


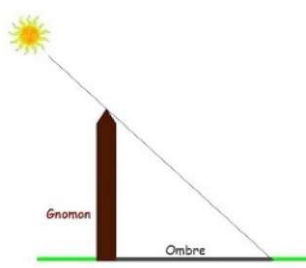
## 3ème partie – Modélisation du mouvement du soleil vu de la terre

Comment calculer la position du soleil dans le ciel vu de la terre (altitude, longitude données), un jour et une heure quelconque de l'année (hémisphère nord) ?

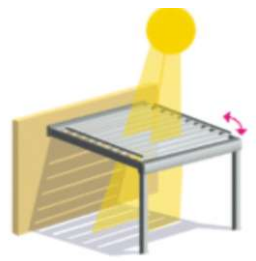
De part notre expérience et nos connaissances en astronomie, nous savons que ce mouvement apparent est proche d'un arc de cercle variable suivant la période de l'année.

Le point le plus haut de la trajectoire étant bien plus élevé en été quand hiver.





# Gnomon et pergola bio-climatique

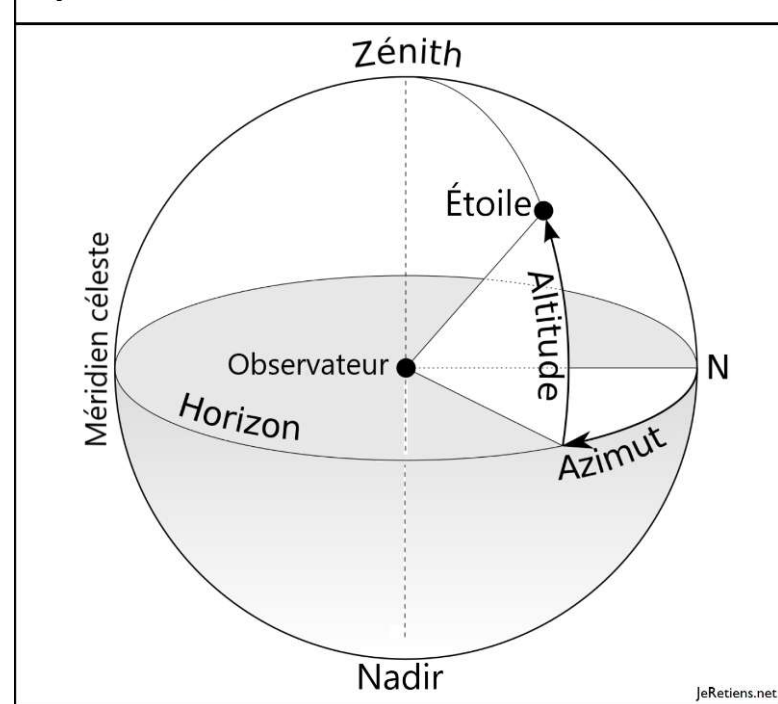


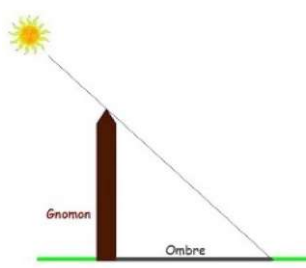
## 3ème partie – Modélisation du mouvement du soleil vue de la terre

Il faut d'abord se familiariser avec une nouvelle façon de repérer un objet sur la **voûte céleste**, le **système de coordonnées horizontales** (coordonnées célestes limitées à un hémisphère) et le vocabulaire associé. La hauteur angulaire solaire est appelé **altitude**, mais nous lui préférons le terme d'**élévation ou déclinaison**. Son **point culminant** (le plus haut de sa trajectoire dans le ciel), ne doit pas être confondu avec le **Zénith** à  $90^\circ$  (qui n'est possible qu'à l'équateur, avec aucune ombre !). L'**azimut** est mesuré au niveau horizontal par rapport au nord de la boussole.

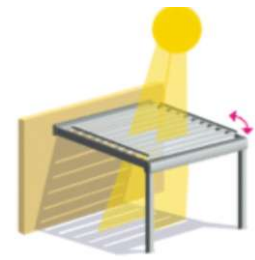
**Attention**, quand l'azimut sera entre  $180^\circ$  et  $360^\circ$ , le soleil bien que visible, ne pourra pas éclairer la maison !

### Système de coordonnées horizontales





# Gnomon et pergola bio-climatique



## 3ème partie – Modélisation du mouvement du soleil vue de la terre

Nous avons tout d'abord utilisé des logiciels en ligne qui donnent l'éphéméride de chaque jour (levé et couché du soleil, hauteur et azimut du soleil...), comme par exemple [www.sunearthtools.com](http://www.sunearthtools.com)

Date:	31/03/2023   GMT0	
coordonnées:	43.4846389, 5.2343202	
localisation:	72, Avenue De La Plantade, Rognac, Berre-l'Étang, Bouches-du-Rhône, France, 13340	
heure	Elevation	Azimut
06:23:20	-0.833°	83.6°
7:00:00	5.81°	89.9°
8:00:00	16.65°	100.44°
9:00:00	27.1°	112°
10:00:00	36.65°	125.61°
11:00:00	44.5°	142.45°
12:00:00	49.51°	163.22°
13:00:00	50.51°	186.55°
14:00:00	47.19°	208.82°
15:00:00	40.47°	227.43°
16:00:00	31.57°	242.35°
17:00:00	21.46°	254.71°
18:00:00	10.76°	265.62°
19:00:00	-0.1°	275.97°
19:04:05	-0.833°	276.68°

select your points

select your shadow profile

recherche

43.4847576,5.2343202 43° 29' 5.127" N 5° 14' 3.553" E

SunRise: 06:23:20 \* 83.6° | SunSet: 19:04:05 \* 276.68° |

72, Avenue De La Plantade, Rognac, Berre-l'Étang, Bouches-du-Rhône

Name

Solar Disk  Analemma  Solstice

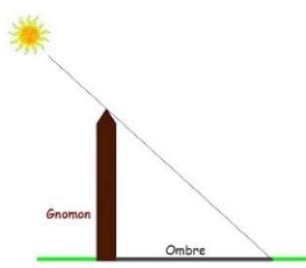
année mois jour heure minute

2023 03 31 19 53

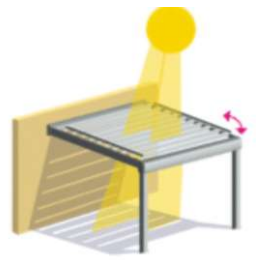
Time zone GMT 0 DST  Default

Mode: ombre

Map showing location: Avenue de la Plantade, Avenue du 8 Mai 1945, Rue Pierre Semard.



# Gnomon et pergola bio-climatique



## 3ème partie – Modélisation du mouvement du soleil vue de la terre

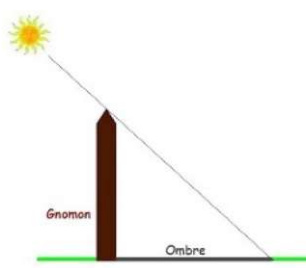
Notre professeur et notre chercheur se sont « amusés », entre Noël et le jour de l'an, à refaire l'ensemble des calculs de géométrie spatiale permettant de retrouver les valeurs de l'azimut et surtout de l'élévation ou hauteur du soleil, n'importe où sur terre, un jour et une heure donnés ! (*Voir document*)



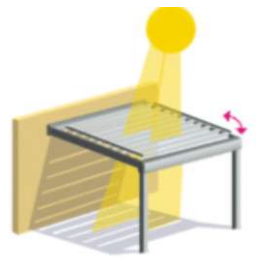
Ils ont tout de même simplifié 3 choses :

- La trajectoire du soleil est supposée circulaire et non légèrement elliptique
- La terre est supposée immobile dans l'espace sur une journée (pendant qu'elle tourne)
- La vitesse de révolution de la terre autour du soleil est supposée constante (ce qui est faux, d'après la loi des aires de Kepler).

Mais ces approximations sont très raisonnables sur un temps court de quelques heures.



# Gnomon et pergola bio-climatique



## 3ème partie – Modélisation du mouvement du soleil vue de la terre

Voici la conclusion de leurs calculs, avec

$\alpha$  : latitude du lieu, en degré

$\Delta$  : angle entre l'axe de la terre et la droite reliant le centre de la terre et du soleil (dépend du jour)

$\gamma$  : heure de la journée ramenée de 24 à 360°

$\theta$  : hauteur angulaire solaire

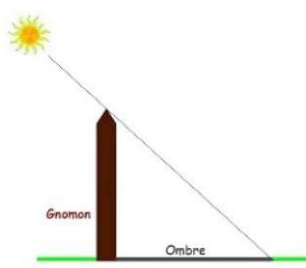
$\mu$  : azimut (mesuré de -180° à 180°)

$$\cos \mu = \frac{\cos \Delta \ominus \cos \theta \sin \alpha}{\sin \theta \cos \alpha}$$

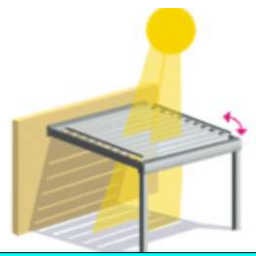
la zone de l'ombre

$$l = h \tan \theta = h \frac{\sqrt{1 - (\cos \theta)^2}}{\cos \theta} = h \sqrt{\frac{1}{(\cos \theta)^2} - 1}$$

$$(\cos \theta)^2 = (\cos \alpha \cos \gamma \sin \Delta)^2 + (\sin \alpha \cos \Delta)^2 + 2 \cos \alpha \sin \alpha \cos \gamma \sin \Delta \cos \Delta$$



# Gnomon et pergola bio-climatique



## 4ème partie - Optimisation

Après de nombreux tests, voici un exemple de configuration satisfaisante.

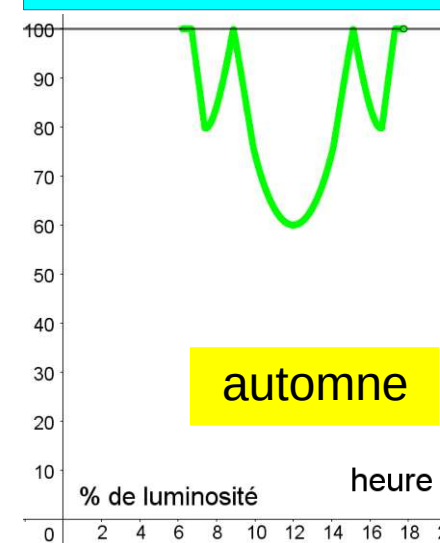
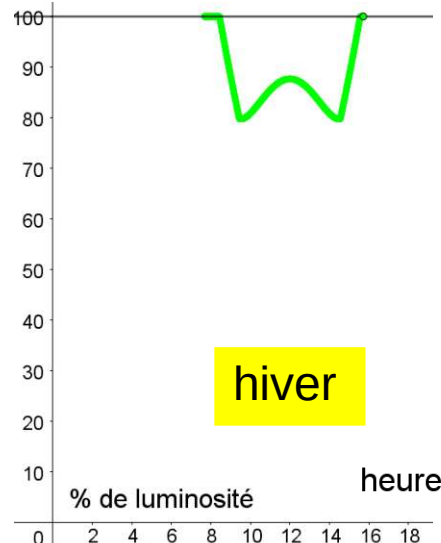
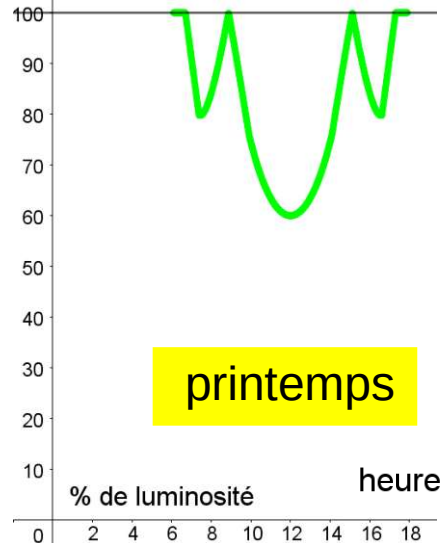
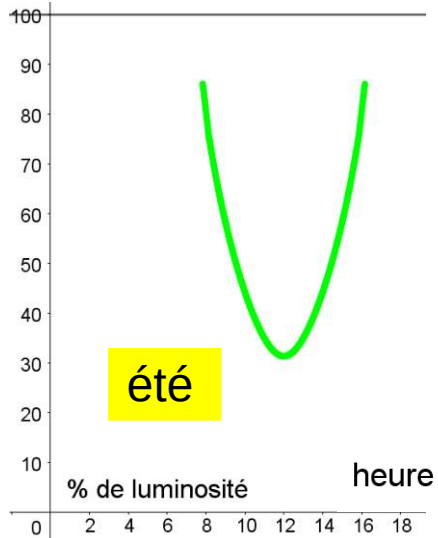
Recherche de configurations intéressantes :

Été : forte limitation de la lumière sur la période 10h -18h

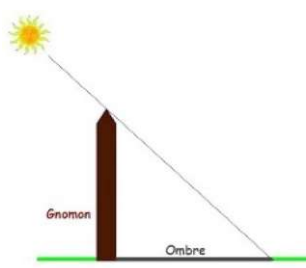
Hiver : maximum de lumière sur la période 10h -17h

Printemps et Automne : positions intermédiaires graduelles

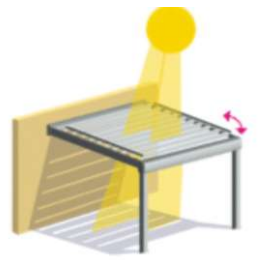
L=20 (écartement)  
H = 20 (largeur lame)  
 $\delta=30^\circ$  (inclinaison lames)  
X = 30 cm (230 de hauteur)  
d = 300 (longueur)







# Gnomon et pergola bio-climatique



## 5ème partie – Programmation

Avec 5 paramètres ( $L$ ,  $H$ ,  $X$ ,  $\delta$ ,  $d$ ), même en limitant les valeurs possibles (à 10 pour chacun, par exemple), le nombre de configurations possibles reste important (100 000 ici).

Il est impossible de toutes les tester manuellement !

Il nous reste donc à faire un programme qui les étudie une par une (sous Scratch au collège).

Mais il nous reste à trouver de bons paramètres de comparaison.

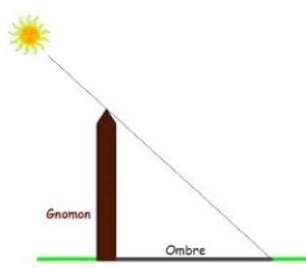
Il nous semble qu'une moyenne pondérée par intervalles de l'ensoleillement, en serait un.

Plus simple, le maximum et le minimum de luminosité sur certaines plages horaires.

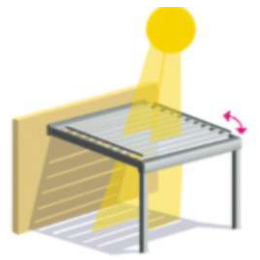
Mais cette comparaison doit être réalisée entre deux configurations sur l'année.

On doit donc utiliser une moyenne (sur la journée) de moyenne (sur l'année) !

Voilà de quoi occuper les activités d'après congrès de notre club :-)



# Gnomon et pergola bio-climatique



***FIN***

Merci de votre attention.

Venez nous retrouver sur notre stand :

- voir nos maquettes,
- tester notre simulateur
- posez des questions
- donnez votre avis